

**Государственное автономное профессиональное
образовательное учреждение Ростовской области
«Ростовский колледж технологий машиностроения»
(ГАПОУ РО «РКТМ»)**

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

**областного конкурса
творческих работ
«ПЕДАГОГИ — НАУКЕ»
среди преподавателей
физики, математики
и астрономии
учреждений среднего
профессионального
образования
Ростовской области**



**Ростов-на-Дону
2026**

**Государственное
автономное
профессиональное
образовательное
учреждение
Ростовской области
«Ростовский колледж
технологий
машиностроения»
(ГАПОУ РО «РКТМ»)**

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

**областного конкурса творческих
работ «ПЕДАГОГИ — НАУКЕ»
среди преподавателей физики,
математики и астрономии
учреждений среднего
профессионального образования
Ростовской области**

**Ростов-на-Дону
2026**

ББК 22.1, 22.3, 22.6

УДК 51, 52, 53

С 23

Сборник материалов областного конкурса творческих работ «ПЕДАГОГИ — НАУКЕ» среди преподавателей физики, математики и астрономии учреждений среднего профессионального образования Ростовской области / Составитель С. А. Шульга. — Ростов н/Д: ГАПОУ «РКТМ», 2026. — 150 с.

Сборник включает все работы, поступившие на областной конкурс творческих работ «ПЕДАГОГИ — НАУКЕ» среди преподавателей физики, математики и астрономии учреждений СПО Ростовской области.

Авторские права, в соответствии с положением о конкурсе, принадлежат авторам конкурсных работ.

Сборник адресован педагогам, методистам и студентам колледжей.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
РАБОТЫ В НОМИНАЦИИ «ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ФИЗИКЕ»	7
<i>Шульга С. А.</i> , к. т. н., преподаватель физики высшей квалификационной категории, Ростовский колледж технологий машиностроения: Сложное решение простой задачи о теле на горизонтальной плоскости	9
<i>Голова О. И.</i> , преподаватель физики высшей квалификационной категории, Красносулинский колледж промышленных технологий: Использование компьютерных технологий при решении задач по физике	27
РАБОТЫ В НОМИНАЦИИ «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ»	35
<i>Шульга С. А.</i> , к. т. н., преподаватель физики высшей квалификационной категории, Ростовский колледж технологий машиностроения: Снова о треугольнике Шарыгина	37
<i>Мелконова Л. Н.</i> , преподаватель математики высшей квалификационной категории, Ростовский колледж металлообработки и автосервиса: Фасетная классификация как инструмент систематизации содержания школьного курса математики: от теневых понятий к целостной картине знаний	55
<i>Быкова С. О.</i> , преподаватель математики первой квалификационной категории, Ростовский колледж металлообработки и автосервиса: Адаптация современных научных теорий к профессионально ориентированному обучению математике на примере элементов теории графов для студентов специальности «Сварочное производство»	65

Косенко Л. В., преподаватель математики высшей квалификационной категории, Донской техникум кулинарного искусства и бизнеса

Метод математического моделирования **75**

Шкирко Н. Н., преподаватель математики высшей квалификационной категории, Красносулинский колледж промышленных технологий:

Внедрение метода рационализации при решении логарифмических и показательных неравенств в учебный процесс **87**

**РАБОТЫ В НОМИНАЦИИ
«АСТРОНОМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ» **97****

Шульга С. А., к. т. н., преподаватель физики высшей квалификационной категории, Ростовский колледж технологий машиностроения:

Простейшие модели планетных систем Коперника и Птолемея: теория, формулы, расчеты **99**

Шульга С. А., к. т. н., преподаватель физики высшей квалификационной категории, Ростовский колледж технологий машиностроения:

Задачи по попятному движению планет: работа над ошибками **127**

Котова Л. П., преподаватель физики и астрономии высшей квалификационной категории, Волгодонский техникум общественного питания и торговли

Эволюция галактик и звёзд **143**

ПРЕДИСЛОВИЕ

Областной дистанционный конкурс творческих работ «ПЕДАГОГИ — НАУКЕ» среди преподавателей физики, астрономии и математики учреждений среднего профессионального образования Ростовской области был проведен Ростовским колледжем технологий машиностроения (ГАПОУ РО «РКТМ») в соответствии с планом работы Совета директоров учреждений профессионального образования Ростовской области на 2026 год.

Все работы, поступившие на конкурс, представлены в настоящем сборнике.

Целями конкурса, в соответствии с положением о конкурсе, являлись:

- стимулирование и поощрение научных исследований преподавателей физики, астрономии и математики образовательных учреждений СПО;
- определение круга и уровня научных проблем, разрабатываемых преподавателями СПО;
- реализация творческого потенциала, повышение мотивации и творческой активности преподавателей;
- накопление и передача опыта и результатов научных исследований, демонстрирование творческих достижений преподавателей;
- наполнение учебного процесса новыми разработками.

Возможными темами конкурсных работ являлись:

- новые задачи школьных физики, астрономии и математики и их решения;
- новые решения известных важных задач школьных физики, астрономии и математики;
- развитие элементов теорий и тем, изучаемых в школьных физике, математике и астрономии;
- адаптация современных научных теорий к школьным физике, математике и астрономии;
- научная систематизация содержания школьных тем;
- новые демонстрационные и учебные эксперименты и их анализ;
- новые устройства, модели, механизмы и приборы и анализ их работы;
- другие научные и научно-прикладные исследования.

Конкурс проводился по следующим четырем номинациям:

- теоретические исследования по физике;
- экспериментальные исследования по физике;
- математические исследования;
- астрономические исследования.

Организаторы конкурса обеспечивали:

- равные условия для всех участников конкурса;
- формирование жюри конкурса;
- создание условий для работы жюри с целью принятия объективных решений.

Организаторы и жюри конкурса обеспечивали:

- подведение итогов конкурса, оформление и рассылку сертификатов участия и дипломов победителей и призеров конкурса;
- оформление и выпуск сборника конкурсных работ и размещение его на сайте РКТМ <https://rktm.info/> в разделе «Мероприятия / Конкурсы, олимпиады» на странице настоящего конкурса.

Жюри конкурса оценивало конкурсные работы по следующим 6 критериям:

- 1) актуальность исследования (научная и/или методическая);
- 2) новизна результатов исследования (научная и/или методическая). Достоверность результатов. Научный уровень исследования;
- 3) теоретическая и практическая значимость исследования;
- 4) связь результатов исследования с учебным процессом. Внедрение результатов исследования в учебный процесс;
- 5) полнота и качество обзора источников по теме исследования;
- 6) качество оформления конкурсной работы.

Конкурс проводился в дистанционном формате.

Положение о конкурсе было представлено на сайте РКТМ <https://rktm.info/> в разделе «Мероприятия» (<https://rktm.info/мероприятия/>) на странице «Конкурсы, олимпиады» (<https://rktm.info/конкурсы-олимпиады/>).

В соответствии с положением о конкурсе к участию в нем допускались и ранее публиковавшиеся работы; количество работ от одного автора не было ограничено; одна конкурсная работа могла быть выполнена несколькими авторами.

Количество участников от одного образовательного учреждения также ограничено не было.

По положению о конкурсе он проводился в один этап, при этом сроки приема заявок и конкурсных работ были продлены до 30 апреля 2026 г. включительно.

Экспертиза и оценка конкурсных работ проводилась с 4 по 8 мая 2026 г.

Список победителей и призеров, сборник конкурсных работ были размещены на сайте РКТМ <https://rktm.info/> на указанной выше странице 18 мая 2026 г.

В соответствии с положением о конкурсе:

- все авторские права принадлежат авторам конкурсных работ;
- ответственность за соблюдение авторских прав в содержании конкурсной работы несёт участник конкурса (участники в случае работы с несколькими авторами), предоставивший данную работу на конкурс.

Тексты конкурсных работ приводятся в авторской редакции, поэтому возможные в них ошибки и несоответствия с принятыми стандартами и нормами, авторскими правами относятся к авторам работ.

ГАПОУ РО «РКТМ»

**Областной конкурс
творческих работ
«ПЕДАГОГИ — НАУКЕ»**

**РАБОТЫ
В НОМИНАЦИИ
«ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ
ИССЛЕДОВАНИЯ
ПО ФИЗИКЕ»**

СЛОЖНОЕ РЕШЕНИЕ ПРОСТОЙ ЗАДАЧИ О ТЕЛЕ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Шульга Сергей Анатольевич,

к. т. н., преподаватель физики высшей квалификационной категории,
Ростовский колледж технологий машиностроения
(ГБПОУ РО «РКТМ»)

АННОТАЦИЯ

Цель настоящей работы — проиллюстрировать то, что при решении физических задач анализ общей формулы для искомых величин получается зачастую сложным и громоздким даже в простейших случаях.

Рассмотрена простая задача о движении тела по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы, называемая ключевой в основных школьных учебниках по физике: проанализированы все возможные случаи и соответствующие им решения; как результат, наглядно показаны сложность и обширность полного анализа получаемых общих формул.

Представлены графики, описывающие все возможные решения данной задачи.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих учебниках и задачниках по физике приводятся общий план и алгоритмы решения физических задач, одними из важных этапов которых являются решение уравнений задачи в общем (буквенном) виде относительно искомых величин и анализ полученного общего решения.

При этом в задачниках профильного уровня почти половина задач дана в общем виде, только с буквенными обозначениями величин (ниже приведены конкретные данные по числу задач общего вида). В таких задачах анализ общей формулы, казалось бы, должен присутствовать обязательно. Тем не менее в задачниках такой анализ проводится в исключительно редких случаях (можно назвать только один задачник из числа широко известных, в котором в задачах систематически анализируется общее решение: это задачник С. В. Ащеулова и В. А. Барышева [9]).

Основная причина этого — в том, что общий анализ получается зачастую сложным и громоздким даже в простейших задачах; проиллюстрировать это и является целью настоящей работы.

Ознакомление с примерами общего анализа решения физических задач для учеников полезно, поучительно и расширяет их понимание того, каким должно быть решение физической задачи. Кроме того, изучение данного полного решения демонстрирует конкретное практическое применение алгебраических методов решения задач с параметрами и тригонометрических неравенств.

1. ОБ ОБЩЕМ ПЛАНЕ И ОБЩЕЙ ФОРМУЛЕ РЕШЕНИЯ ФИЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Этот план (порядок) общеизвестен и присутствует во многих учебниках и задачниках. Вот, например, возможный вариант этого плана из книги [1, с. 9]: 1) изучение условия задачи; 2) краткая запись условия в буквенных обозначениях; 3) выполнение чертежа, схемы; 4) анализ физических процессов задачи; 5) запись уравнений законов и решение полученной системы уравнений относительно искомой величины с целью получения ответа в общем виде; 6) исследование полученного решения в общем виде; 7) выражение всех величин в единицах СИ; 8) проверка решения по единицам измерения величин; 9) подстановка числовых значений величин в формулу и вычисление искомой величины.

Нас интересуют пункты 5 и 6 плана; к ним в данной книге есть такое пояснение [1, с. 11]: «Исследование решения в общем виде не всегда можно осуществить, и тем не менее следует учащихся приучать к тому, чтобы они посмотрели на итоговую формулу и поискали, что из нее следует, какие частные случаи возможны и т. д. Например, если дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту, зависит от синуса двойного угла бросания, то отсюда следует, что максимальная дальность полета будет при угле $\alpha = 45^\circ$ ».

В известном пособии по решению задач [2, с. 16] справедливо указывается, что в процессе решения поставленной задачи следует различать три этапа: физический, математический и анализ решения, причем на этапе анализа решения выясняют, «как и от каких физических величин зависит найденная величина, при каких условиях эта зависимость осуществляется и т. д. В заключение анализа общего решения рассматривается возможность постановки и решения других задач путем изменения и преобразования условий данной задачи».

Так же отмечено и, например, в пособии [3, с. 7]: «На этапе проверки решения оценивают реальность результата... Проверяют справедливость выводов для более простых частных и предельных случаев, при которых ответ очевиден или может быть получен сразу независимо от общего решения. Определяют условия, при которых выполняется полученная зависимость. Находят аналогию с решениями других задач».

И практически всегда при описании общего порядка решения задач указывается (например, [4, с. 7]), что «решение задачи должно быть получено в общем виде (то есть ответ необходимо представить в буквенном виде). И только затем подставляются численные значения параметров».

К этому заметим, во-первых, что если требуется численное решение задачи (т. е. исходные величины задачи заданы численно), то при «зачете ответа» анализ общей формулы считается не обязательным даже при требуемом развернутом решении задачи: если эта

общая формула выведена правильно и соответствует именно заданному численному набору исходных данных, и по этой формуле правильно вычислена искомая величина, то, как это принято, задача считается решенной правильно (это обычная практика экзаменов, в том числе ЕГЭ).

Однако во-вторых отметим, что в задачниках профильного уровня почти половина задач дана в общем виде, только с буквенными обозначениями величин: например, в первых подразделах («Прямолинейное равномерное движение») авторитетных задачников таких задач: 19 из 43 в [5], 10 из 19 в [6], 36 из 71 в [7] (подраздел «Кинематика»), 16 из 23 в [8], — то есть численные расчеты зачастую в задаче и не требуются.

Вот в таких задачах общего вида анализ общей формулы, казалось бы, должен присутствовать обязательно. Тем не менее в задачниках такой анализ проводится в исключительно редких случаях (можно назвать только один задачник из числа широко известных, в котором для задач систематически выполняется анализ общего решения, — это [9]).

Задается вопрос — почему так? Потому, что анализ общей (буквенной) формулы решения задачи совсем не прост даже для задач общепринято простых — демонстрации этого и посвящена данная работа.

Здесь можно провести аналогию со школьной математикой, а именно с «вершиной» школьной алгебры — задачами с параметрами: для школьников, как правило знающих формулу корней квадратного уравнения и умеющих ею пользоваться, обычно неожиданным является то, что полное решение квадратного уравнения общего вида $ax^2 + bx + c = 0$ занимает половину тетрадной страницы:

$$A) a = 0: 1) b \neq 0: x = -\frac{c}{b};$$

$$2) b = 0: a) c = 0: x \text{ — любое } (x \in R);$$

$$б) c \neq 0: \text{ нет решения } (x \in \emptyset);$$

$$B) a \neq 0: 1) D = b^2 - 4ac > 0: x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};$$

$$2) D = 0: x = -\frac{b}{2a};$$

$$3) D < 0: \text{ нет решения.}$$

2. ПРОСТАЯ ЗАДАЧА: ИЗВЕСТНЫЕ ЕЕ РЕШЕНИЯ

В качестве примера, что анализ получаемой при решении физических задач общей (буквенной) формулы совсем не прост, возьмем задачу из числа простых, если не простейших, — о скольжении тела по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы.

Эта задача присутствует во многих учебниках и задачниках, есть она и в учебниках физики 10 класса базового и углубленного уровней В. А. Касьянова [10, с. 78–79; 11, с. 109–110] (к слову, учебники В. А. Касьянова — сейчас единственные, наряду с учебниками Г. Я. Мякишева, допущенные Министерством просвещения РФ к обучению). В этих учебни-

ках она отнесена к числу ключевых в разделе 3 «Динамика материальной точки» (для базового уровня ключевых задач описано две, вторая задача — о весе тела в лифте; для углубленного уровня добавлена ещё одна задача о соскальзывании тела с наклонной плоскости).

При этом интересно то, что в этих учебниках В. А. Касьянова, равно как и в его учебниках для 11 класса, никакие другие задачи не названы «ключевыми» (очевидно, это недоработка данных учебников).

Поскольку далее мы представим полное решение этой задачи, то приведем полностью её условие и решение из учебников В. А. Касьянова:

найти силу нормальной реакции опоры и ускорение тела массой m , движущегося по поверхности стола под действием силы F , направленной под углом α к горизонту. Коэффициент трения скольжения между телом и поверхностью стола равен μ .

Решение: на тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$, сила $\vec{F}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленная противоположно скорости движения.

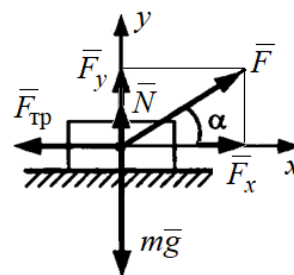


Рис. 1

Второй закон Ньютона в векторной форме имеет вид

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}}. \quad (a)$$

Направим ось x вдоль ускорения $\vec{a}$, а ось y вертикально.

Запишем уравнение (a) через проекции на оси x и y :

$$\begin{cases} ma = 0 + 0 + F \cos \alpha - F_{\text{тр}} & (\text{на ось } x), \\ 0 = -mg + N + F \sin \alpha + 0 & (\text{на ось } y). \end{cases} \quad (б)$$

Согласно закону трения $F_{\text{тр}} = \mu N$.

Подставляя выражение для силы трения в первое уравнение системы (б), получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными N и a :

$$\begin{cases} ma = F \cos \alpha - \mu N, \\ 0 = -mg + N + F \sin \alpha. \end{cases} \quad (в)$$

Из второго уравнения находим силу нормальной реакции опоры N :

$$N = mg - F \sin \alpha. \quad (г)$$

Вертикальная компонента внешней силы $\vec{F}_y$ ($F_y = F \sin \alpha$) приподнимает тело и уменьшает силу давления на опору, а следовательно, и силу трения.

Подставляя N из выражения (г) в первое уравнение системы (в)

$$ma = F \cos \alpha - \mu(mg - F \sin \alpha),$$

находим ускорение тела:

$$a = \frac{F \cos \alpha - \mu(mg - F \sin \alpha)}{m}.$$

Решение в учебнике окончено; отметим, что более «говорящим», видимо, является запись окончательного выражения несколько в другом виде (добавляем также указание $a = a_x$, т. к. решение касается только этого варианта):

$$a = a_x = \frac{F}{m}(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - \mu g. \quad (1)$$

Итак, как видим, в данных учебниках никакого общего анализа решения нет. А ведь даже простейшие подстановки дают абсурдные результаты: при $F = 0$, когда тело обязано быть неподвижным, имеем неприемлемое $a = -\mu g$; при $\alpha = 90^\circ$, когда тело неподвижно или движется вверх, получаем не менее неприемлемое $a = \mu \left(\frac{F}{m} - g \right)$.

Более подробное решение представлено в справочнике [12, с. 66–67]; для полноты картины приведем полностью и это решение (обозначения изменены на примененные выше):

тело весом P расположено на горизонтальной плоскости. Коэффициент трения покоя между телом и плоскостью равен μ . К телу приложена сила F под углом α к горизонтали. Найти условия, определяющие характер движения тела.

Второй закон Ньютона в векторной форме:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Возможны следующие варианты движения.

1. Тело покоится или движется равномерно и прямолинейно, так что ускорение равно нулю. Спроектируем силы на горизонтальную и вертикальную координатные оси, учитывая, что ускорение тела равно нулю:

$$F \cos \alpha - \vec{F}_{\text{тр}} = 0; \quad F \sin \alpha + N - P = 0.$$

Из этих уравнений находим, учитывая, что $F_{\text{тр}} = \mu N$:
$$F = \frac{\mu P}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}.$$

Заметим, что при $P = F \sin \alpha$ тело начнет отрываться от горизонтальной поверхности ($N = 0$).

2. Тело движется с ускорением a . В этом случае уравнения проекций такие:

по горизонтали: $F \cos \alpha - F_{\text{тр}} = \frac{P}{g} a$; по вертикали: $F \sin \alpha + N - P = 0$,

откуда
$$a = \frac{g}{P} [F \cos \alpha - \mu (P - F \sin \alpha)] = \frac{gF}{P} (\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - \mu g$$

(второе уравнение, как и ранее, приведено нами — как более подходящее для анализа).

Для того, чтобы тело двигалось с ускорением, необходимо соблюдение условия

$$F \cos \alpha - \mu (P - F \sin \alpha) > 0,$$

или
$$F > \frac{\mu P}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}.$$

Коэффициент трения покоя

$$\mu = \frac{F \cos \alpha}{P - F \sin \alpha}.$$

Итак, здесь проведен лишь частичный анализ вариантов. Но решение ещё не полное.

3. СНАЧАЛА — ЗАДАЧА ПРОСТЕЙШАЯ

Сначала для иллюстрации непростоты общего анализа рассмотрим простейшую, казалось бы, задачу:

на тело массой m на горизонтальной плоскости начинает действовать постоянная вертикальная сила F (рис. 2). Каково состояние тела, если на него действуют только вертикальные силы?

Считаем, что плоскость неподвижна, а тело — материальная точка; вводим систему координат Oxy , жестко связанную с плоскостью (как и на рис. 1).

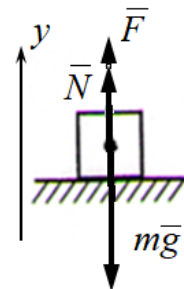


Рис. 2

В условии задачи не оговорено, двигалось или покоилось тело до начала действия силы F . Условие же, что силы только вертикальны, указывают на два варианта:

1) при $\mu > 0$ тело покоилось (т. к. при движении по плоскости на него действовала бы горизонтальная сила трения);

2) при $\mu = 0$ тело по 1-му закону Ньютона или покоилось, или двигалось по горизонтали равномерно прямолинейно со скоростью u_0 ; при этом оба эти состояния не изменялись бы и длились бы до бесконечности при отсутствии дополнительного внешнего воздействия. Вместе с тем даже малый импульс $F_x \Delta t$ какой-либо горизонтальной силы F_x изменяет скорость тела (по закону сохранения импульса $\Delta v = F_x \Delta t$), в частности — приводит тело из состояния покоя в равномерное прямолинейное движение (однако в реальности случай $\mu = 0$ не реализуется, это идеальная модель — физика и есть «наука об идеализированных моделях»).

После начала действия силы F движение тела складывается из движений по вертикали и горизонтали. Реализуются 3 случая:

1. Тело остается на плоскости и оказывает давление на плоскость — это реализуется при двух условиях: 1) $\bar{N} + \bar{F} + m\bar{g} = 0$; 2) $N = mg - F_y > 0$, т. е. $F_y < mg$ (в частности, при всех значениях $F_y < 0$, когда сила F направлена вниз от плоскости). При этом движение по горизонтали описано выше в п. 3, т. е. возможны покой (при $\mu \geq 0$) и прямолинейное равномерное движение со скоростью u_0 (при $\mu = 0$).

2. Тело остается на плоскости, но не оказывает на неё давление — это при $N = 0$, когда $F_y = mg$. По горизонтали сила трения не действует и тело «парит» над плоскостью, как бы находится на бесконечно тонкой «воздушной подушке». При этом тело покоится или движется по плоскости равномерно прямолинейно, как и в случае 1. Отличие же заключается в том, что при малейшем дополнительном импульсе $\Delta F_y \cdot \Delta t > 0$ вертикальной силы F тело покидает плоскость и движется вверх равномерно прямолинейно.

3. Тело отрывается от плоскости — при $F_y > mg$. По вертикали — равноускоренное прямолинейное движение с ускорением $a = a_y = \frac{F}{m} - g$, по горизонтали движение — как и в случае 1, т. е. траектория тела при $v_0 = 0$ — вертикальная прямая, при $v_0 > 0$ — парабола (как и при свободном падении тела при горизонтальном броске, только с направленной вверх ветвью).

4. ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ: ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Итак, продолжим рассматривать простую задачу, названную в учебниках В. А. Касьянова ключевой:

тело (материальная точка) массой m покоится на горизонтальной плоскости; на него начинает действовать постоянная сила F , направленная под углом α к горизонту. Определить состояние тела, если коэффициент трения скольжения равен μ .

В частном случае равноускоренного движения по горизонтали решение — из учебников (формула (1)), приведенное выше, достаточно простое. Рассмотрим теперь общее решение этой задачи, оказывающееся объемным и сложным.

Общее решение предполагает определение не только всех случаев движения тела, но и допустимых значений параметров F и α , соответствующих каждому случаю (параметр μ считаем относящимся к плоскости и заданным).

Таким образом, эта задача является также интересным примером приложения школьного алгебраического раздела «Задачи с параметрами» к физическим задачам.

Движение в общем случае — суперпозиция движений по вертикали и горизонтали. Анализируем далее эти движения по отдельности в системе координат Ox , жестко связанной с плоскостью (рис. 1).

5. РЕШЕНИЕ С ОПРЕДЕЛЕНИЕМ ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ СИЛЫ F ПРИ ЗАДАННОМ УГЛЕ α

5.1. Случаи движения и условия для них

Угол α отсчитываем от оси Ox (т. е. выше этой оси $\alpha > 0$, ниже $\alpha < 0$), и для определенности направления силы F рассматриваем этот угол в пределах $-90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$. Компоненты силы F : $F_x = F \cos \alpha$; $F_y = F \sin \alpha$.

Если тело находится на плоскости, то $\vec{N} + \vec{F}_y + m\vec{g} = 0$ и $N = mg - F_y > 0$.

Выделяем 5 случаев движения тела. Применительно к движению по вертикали три возможных случая рассмотрены выше в п. 3; кроме того, 1-й случай разбивается еще на 3 варианта:

– **вариант 1:** тело находится на плоскости ($v_y = 0$) и оказывает давление на плоскость. Условие этого — $N > 0$, т. е. $F_y < mg$. При этом возможны 3 варианта движения по горизонтали:

вариант 1.1: тело покоится на плоскости — когда горизонтальная сила тяги F_x меньше силы трения скольжения $F_{\text{тр.ск}} = \mu N$: $F_x < F_{\text{тр.ск}}$;

вариант 1.2: тело покоится на плоскости — при $F_x = F_{\text{тр.ск}}$;

вариант 1.3: тело движется по плоскости равноускоренно прямолинейно — при $F_x > F_{\text{тр.ск}}$;

– **вариант 2:** тело также находится на плоскости, но не оказывает на неё давление — это при $N = 0$, т. е. $F_y = mg$;

– **вариант 3:** тело покидает плоскость и движется в пространстве равноускоренно прямолинейно — при $F_y > mg$.

Для наглядности все 5 вариантов сведены в таблицу:

Вариант 1			Вариант 2	Вариант 3	
тело остается на плоскости				тело движется вверх	
$N > 0; \; F_y < mg$			$N = 0; \; F_y = mg ;$ $F_{\text{тр.ск}} = \mu N = 0$	$F_y > mg$	
вариант 1.1	вариант 1.2	вариант 1.3			
$F_x < F_{\text{тр.ск}}$	$F_x = F_{\text{тр.ск}}$	$F_x > F_{\text{тр.ск}}$			
тело покоится			тело движется прямолинейно равноускоренно		
$a = 0$			a — по (1)	a — по (17)	a — по (21)

5.2. Вариант 1

Тело находится на плоскости, причем $N > 0$, $F_y < mg$, т. е. **условие по вертикали** —

$$F \sin \alpha < mg. \quad (2)$$

Решаем это неравенство относительно F (т. е. находим допустимые значения F , считая угол α заданным):

$$1) \text{ при } -90^\circ \leq \alpha \leq 0 \text{ получаем: } F \text{ — любое } (F > 0); \quad (3)$$

$$2) \text{ при } 0 < \alpha \leq 90^\circ: \quad F < \frac{mg}{\sin \alpha}. \quad (4)$$

Рассмотрим теперь для данного случая три указанных выше возможных варианта движения по горизонтали.

Вариант 1.1

При этом $F_x < F_{\text{тр.ск}}$, т. е. тело покоится на плоскости, $a = 0$.

Перепишем условие $F_x < F_{\text{тр.ск}}$ в виде $F \cos \alpha < \mu N$; далее с учетом того, что $N = mg - F_y = mg - F \sin \alpha$, получаем: $F(\mu \sin \alpha + \cos \alpha) < \mu mg$, или

$$F \sin(\alpha + \operatorname{arccctg} \mu) < \frac{\mu mg}{\sqrt{\mu^2 + 1}}; \quad (5)$$

при этом учтено, что $\arcsin \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}} = \arccos \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} = \operatorname{arccctg} \mu$.

Находим для силы F из неравенства (5):

1) при $\sin(\alpha + \operatorname{arccctg} \mu) \leq 0$, т. е. при $-90^\circ \leq \alpha \leq -\operatorname{arccctg} \mu$:

F — любое (с учетом того, что $F > 0$); (6)

2) при $\sin(\alpha + \operatorname{arccctg} \mu) > 0$, т. е. при $-\operatorname{arccctg} \mu < \alpha \leq 90^\circ$:

$$0 < F < F_0, \quad \text{где} \quad F_0 = \frac{\mu mg}{\sqrt{\mu^2 + 1} \sin(\alpha + \operatorname{arccctg} \mu)}. \quad (7)$$

График функции $y = \frac{F_0}{mg}$ показан ниже на рис. 3. Как видно, при $\alpha \rightarrow -\operatorname{arccctg} \mu$ значения F_0 бесконечно возрастают, т. е. вертикаль $\alpha = -\operatorname{arccctg} \mu$ есть вертикальная асимптота для функции y .

Кроме того, функция имеет минимум $y = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}}$ (т. е. $F_0 = \frac{\mu mg}{\sqrt{\mu^2 + 1}}$) при $\sin(\alpha + \operatorname{arccctg} \mu) = 1$; $\alpha = 90^\circ - \operatorname{arccctg} \mu$; этот минимум — точка B на рис. 3.

При $\alpha = 0$ (точка A) имеем $y = \mu mg$ (т. е. $F_0 = \mu mg$); при $\alpha = 90^\circ$ (точка C) получаем $y = 1$ (т. е. $F_0 = mg$).

В итоге для данного варианта получили систему из двух совокупностей с двумя неравенствами в каждой: условий (6)–(7) по горизонтали и условий (3)–(4) по вертикали. При этом легко доказать, что

$$\text{при } 0 < \alpha < 90^\circ \text{ выполняется } F_0 < \frac{mg}{\sin \alpha} \text{ (при } \alpha = 90^\circ \text{ получаем } F_0 = mg), \quad (8)$$

поэтому общее решение — именно совокупность неравенств (6)–(7).

Вариант 1.2

Здесь $F_x = F_{\text{тр.ск}}$, т. е. тело также покоится на плоскости, $a = 0$.

При этом $F \cos \alpha = \mu N$ и получаем:

$$F \sin(\alpha + \operatorname{arccctg} \mu) = \frac{\mu mg}{\sqrt{\mu^2 + 1}}. \quad (9)$$

Для силы F теперь находим:

1) при $\sin(\alpha + \operatorname{arccctg} \mu) \leq 0$, т. е. при $-90^\circ \leq \alpha \leq -\operatorname{arccctg} \mu$: нет решения для F ;

2) при $\sin(\alpha + \operatorname{arccctg} \mu) > 0$, т. е. при $-\operatorname{arccctg} \mu < \alpha < 90^\circ$:

$$F = F_0, \quad \text{где } F_0 \text{ — по (7)}. \quad (10)$$

При объединении неравенства (10) с совокупностью условий по вертикали (3)–(4) общим решением остается неравенство (10).

Этот случай соотносится со случаем гладкой плоскости ($\mu = 0$), т. к. сила трения скомпенсирована. При этом если условие задачи дополнить тем, что в начальный момент действия силы F тело имеет некоторую горизонтальную скорость $v_{x0} \neq 0$, то далее оно будет двигаться с этой скоростью равномерно прямолинейно.

Вариант 1.3

При этом $F_x > F_{\text{тр.ск}}$, т. е. тело движется по плоскости равноускоренно прямолинейно, ускорение горизонтально и определено формулой (1): $a = a_x = \frac{F}{m}(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - \mu g$.

Имеем:

$$F \sin(\alpha + \operatorname{arccctg} \mu) > \frac{\mu mg}{\sqrt{\mu^2 + 1}}, \quad (11)$$

и для силы F получаем:

- 1) при $\sin(\alpha + \operatorname{arccctg} \mu) \leq 0$, т. е. $-90^\circ \leq \alpha \leq -\operatorname{arccctg} \mu$: нет решения для F ;
- 2) при $\sin(\alpha + \operatorname{arccctg} \mu) > 0$, т. е. $-\operatorname{arccctg} \mu < \alpha \leq 90^\circ$: $F > F_0$. (12)

С учетом (8) при объединении решения (12) с условиями по вертикали (3)–(4) находим общее решение для этого варианта:

$$\text{– при } -\operatorname{arccctg} \mu < \alpha \leq 0: \quad F > F_0; \quad (13)$$

$$\text{– при } 0 < \alpha < 90^\circ: \quad F_0 < F < \frac{mg}{\sin \alpha}; \quad (14)$$

$$\text{– в частном случае } \alpha = 90^\circ: \quad \text{тело покоится на плоскости и } F = F_0. \quad (15)$$

5.3. Вариант 2

Тело находится на плоскости, причем $N = 0$; $F_y = mg$, то есть

$$F \sin \alpha = mg. \quad (16)$$

При $0 < \alpha < 90^\circ$ движение тела — равноускоренное прямолинейное, ускорение $\bar{a}$ горизонтально. Так как $F_{\text{тр}} = 0$, то

$$a = a_x = \frac{F}{m} \cos \alpha. \quad (17)$$

Из уравнения (16) получаем для F :

- 1) при $-90^\circ \leq \alpha \leq 0$: нет решения для F ;
- 2) при $0 < \alpha \leq 90^\circ$: $F = \frac{mg}{\sin \alpha}$. (18)

Эта величина F — в рассматриваемом случае единственная допустимая для заданного значения α .

В частном случае $\alpha = 90^\circ$ имеем: $a = 0$; $F = mg$, тело покоится на плоскости.

5.4. Вариант 3

Тело покидает плоскость и движется в пространстве равноускоренно прямолинейно, тогда

$$F \sin \alpha > mg, \quad (19)$$

то есть: 1) при $-90^\circ \leq \alpha \leq 0$: нет решения для F ;

$$2) \text{ при } 0 < \alpha \leq 90^\circ: \quad F > \frac{mg}{\sin \alpha}. \quad (20)$$

В рассматриваемом случае это — единственное условие для F (нет условий по горизонтали).

Ускорение $\bar{a}$ тела при $\alpha \neq 90^\circ$ направлено под углом φ к горизонту, причем

$$\varphi = \arctg \frac{F_y - mg}{F_x} = \arctg \left(\tg \alpha - \frac{mg}{F \cos \alpha} \right)$$

(при $\alpha = 90^\circ$ ускорение $\bar{a}$ вертикально, $\varphi = 90^\circ$). При этом

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{F_x}{m} = \frac{F}{m} \cos \alpha; \quad a_y = \frac{1}{m} (F_y - mg) = \frac{F}{m} \sin \alpha - g; \\ a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{1}{m} \sqrt{F_x^2 + (F_y - mg)^2} = \frac{1}{m} \sqrt{F^2 - 2Fmg \sin \alpha + m^2 g^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

В частном случае $\alpha = 90^\circ$ тело движется по вертикальной прямой,

$$a = a_y = \frac{F}{m} - g. \quad (22)$$

5.5. Объединение решений

Объединение рассмотренных выше решений и есть ответ к 1-й части задачи, т. е. к определению состояния тела при различных значениях силы F и заданном угле α .

То, что ответ при записи в школьной тетради оказывается необычайно обширным для школьных задач, — очевидно. А ведь это простая задача.

1. Вариант 1: тело находится на плоскости, $N > 0$:

1) **варианты 1.1–1.2:** тело покоится на плоскости: $a = 0$; при этом условия для F :

а) при $-90^\circ \leq \alpha \leq -\arctg \mu$: F — любое ($F > 0$);

б) при $-\arctg \mu < \alpha \leq 90^\circ$: $0 < F \leq F_0$, где $F_0 = \frac{\mu mg}{\sqrt{\mu^2 + 1} \sin(\alpha + \arctg \mu)}$;

2) **вариант 1.3:** тело движется по плоскости равноускоренно прямолинейно:

$$\text{ускорение } a = a_x = \frac{F}{m}(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - \mu g;$$

$$\text{условия для } F: \text{ а) при } -\operatorname{arctg} \mu < \alpha \leq 0: F > F_0;$$

$$\text{б) при } 0 < \alpha < 90^\circ: F_0 < F < \frac{mg}{\sin \alpha}.$$

2. **Вариант 2:** тело находится на плоскости, $N = 0$:

$$\text{а) при } 0 < \alpha < 90^\circ: \text{ движение — равноускоренное прямолинейное, } F = \frac{mg}{\sin \alpha},$$

$$\text{ускорение } a = a_x = \frac{F}{m} \cos \alpha;$$

$$\text{б) при } \alpha = 90^\circ: \text{ тело покоится на плоскости, } F = F_0 = mg.$$

3. **Вариант 3:** тело покидает плоскость и движется в пространстве равноускоренно прямолинейно:

$$\text{а) при } 0 < \alpha \leq 90^\circ: F > \frac{mg}{\sin \alpha}, \text{ ускорение } a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{1}{m} \sqrt{F^2 - 2Fmg \sin \alpha + m^2 g^2};$$

$$\text{б) при } \alpha = 90^\circ: F > mg, a = a_y = \frac{F}{m} - g.$$

Графическое представление решения

Графики для определения допустимых значений относительной силы $\tilde{F} \equiv F/mg$ в зависимости от угла её приложения α представлены на рис. 3.

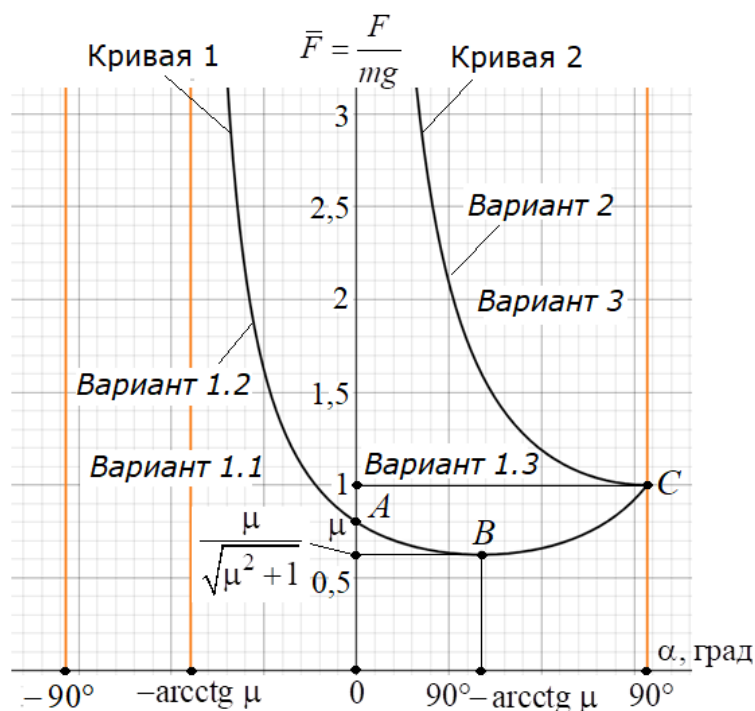


Рис. 3. Графики зависимости допустимых значений относительной силы $\tilde{F} = F/mg$ в зависимости от угла α при $\mu = 0,8$

Графики для определения допустимых значений относительной силы $\tilde{F} \equiv F/mg$ в зависимости от угла её приложения α представлены на рис. 3.

Кривая 1: $\tilde{F} = \frac{F_0}{mg}$; кривая 2: $\tilde{F} = \frac{1}{\sin \alpha}$; вертикаль $\alpha = -\operatorname{arccctg} \mu$ есть вертикальная

асимптота для кривой 1.

Области графика:

- область под кривой 1 и между вертикалями $\alpha = -90^\circ$ и $\alpha = -\operatorname{arccctg} \mu$ соответствует варианту 1.1;
- точки кривой 1 — вариант 1.2;
- область между кривыми 1 и 2 — вариант 1.3;
- точки кривой 2 — вариант 2;
- область выше кривой 2 — вариант 3.

6. РЕШЕНИЕ С ОПРЕДЕЛЕНИЕМ ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ УГЛА α ПРИ ЗАДАННОЙ СИЛЕ F

В этом случае задача сводится к решению неравенств и уравнений (2), (5), (9), (11), (16), (19) соответственно для случаев 1–6 относительно угла α (а не силы F , как в п. 5).

Графики для определения допустимых значений угла α в зависимости от относительной силы $\bar{F} \equiv F/mg$ (т. е. с горизонтальной осью $\bar{F}$ и вертикальной осью α) получаются поворотом рис. 3 на 90° и отражением снизу вверх.

6.1. Вариант 1

Применительно к движению по вертикали решаем неравенство (2) относительно α :

1) при $F < mg$ получаем: α — любое ($-90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$);

2) при $F = mg$: $\alpha \neq 90^\circ$;

3) при $F > mg$: $-90^\circ \leq \alpha < \arcsin \frac{mg}{F}$.

Далее рассматриваем для данного случая три варианта движения по горизонтали.

Вариант 1.1

Тело покоится на плоскости: $F_x < F_{\text{тр.ск}}$; $a = 0$:

1) при $0 < F < F_1$: α — любое ($-90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$),

$$\text{причем } F_1 = \frac{\mu mg}{\sqrt{\mu^2 + 1}}; \quad (23)$$

2) при $F = F_1$: $\alpha \neq 90^\circ - \operatorname{arccctg} \mu$;

$$3) \text{ при } F_1 < F < mg : -90^\circ \leq \alpha \leq A; \quad B \leq \alpha \leq 90^\circ, \quad (24)$$

$$\text{где } A = \arcsin \frac{\mu^2 mg - \sqrt{D}}{(\mu^2 + 1)F}; \quad B = \arcsin \frac{\mu^2 mg + \sqrt{D}}{(\mu^2 + 1)F}; \quad D = (\mu^2 + 1)F - \mu^2 m^2 g^2;$$

$$4) \text{ при } F \geq mg : -90^\circ \leq \alpha < A.$$

Вариант 1.2

Тело покоится на плоскости: $F_x = F_{\text{тр.ск}}$; $a = 0$:

$$1) \text{ при } 0 < F < F_1 : \quad \text{для } \alpha \text{ нет решения};$$

$$2) \text{ при } F = F_1 : \quad \alpha = 90^\circ - \operatorname{arccctg} \mu;$$

$$3) \text{ при } F_1 < F < mg : \quad \alpha = A; \quad \alpha = B;$$

$$4) \text{ при } F \geq mg : \quad \alpha = A.$$

Вариант 1.3

Тело движется по плоскости равноускоренно прямолинейно, $F_x > F_{\text{тр.ск}}$, ускорение a — по формуле (1):

$$1) \text{ при } 0 < F \leq F_1 : \quad \text{для } \alpha \text{ нет решения};$$

$$2) \text{ при } F_1 < F < mg : \quad A < \alpha < B;$$

$$3) \text{ при } F \geq mg : \quad A < \alpha < \arcsin \frac{mg}{F}.$$

6.2. Вариант 2

Тело находится на плоскости, причем $N = 0$, $F_y = mg$, движение — равноускоренное прямолинейное, ускорение a — по формуле (18):

$$1) \text{ при } 0 < F < mg : \quad \text{для } \alpha \text{ нет решения};$$

$$2) \text{ при } F \geq mg : \quad \alpha = \arcsin \frac{mg}{F}.$$

6.3. Вариант 3

Тело покидает плоскость и движется в пространстве равноускоренно прямолинейно, $F_y \geq mg$, ускорение a — по формулам (21)–(22):

$$1) \text{ при } 0 < F < mg : \quad \text{для } \alpha \text{ нет решения};$$

$$2) \text{ при } F \geq mg : \quad \arcsin \frac{mg}{F} < \alpha \leq 90^\circ.$$

6.4. Объединение решений

Это объединение рассмотренных выше решений и есть ответ ко 2-й части задачи, т. е. к определению состояния тела при различных значениях угла α и заданной силе F .

1. **Вариант 1:** тело находится на плоскости, $N > 0$:

1.1) **варианты 1.1–1.2:** тело покоится на плоскости: $a = 0$; при этом условия для α :

$$a) \text{ при } 0 < F \leq F_1: \quad \alpha \text{ — любое } (-90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ), \text{ причем } F_1 = \frac{\mu mg}{\sqrt{\mu^2 + 1}};$$

$$б) \text{ при } F_1 < F < mg: \quad -90^\circ \leq \alpha \leq A; \quad B \leq \alpha \leq 90^\circ, \text{ где } A, B \text{ — по (24);}$$

$$в) \text{ при } F \geq mg: \quad -90^\circ \leq \alpha \leq A;$$

1.2) **вариант 1.3:** тело движется по плоскости равноускоренно прямолинейно, ускорение $a = a_x = \frac{F}{m}(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - \mu g$:

$$a) \text{ при } F_1 < F < mg: \quad A < \alpha < B;$$

$$б) \text{ при } F \geq mg: \quad A < \alpha < \arcsin \frac{mg}{F}.$$

2. **Вариант 2:** тело находится на плоскости, $N = 0$, движение — равноускоренное прямолинейное, ускорение $a = a_x = \frac{F}{m} \cos \alpha$, условие для α :

$$\text{при } F \geq mg \quad \alpha = \arcsin \frac{mg}{F}.$$

3. **Вариант 3:** тело покидает плоскость и движется в пространстве равноускоренно прямолинейно, ускорение $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{1}{m} \sqrt{F^2 - 2Fmg \sin \alpha + m^2 g^2}$, условие для α :

$$\text{при } F \geq mg \quad \arcsin \frac{mg}{F} < \alpha \leq 90^\circ.$$

6.5. Графическое представление решения

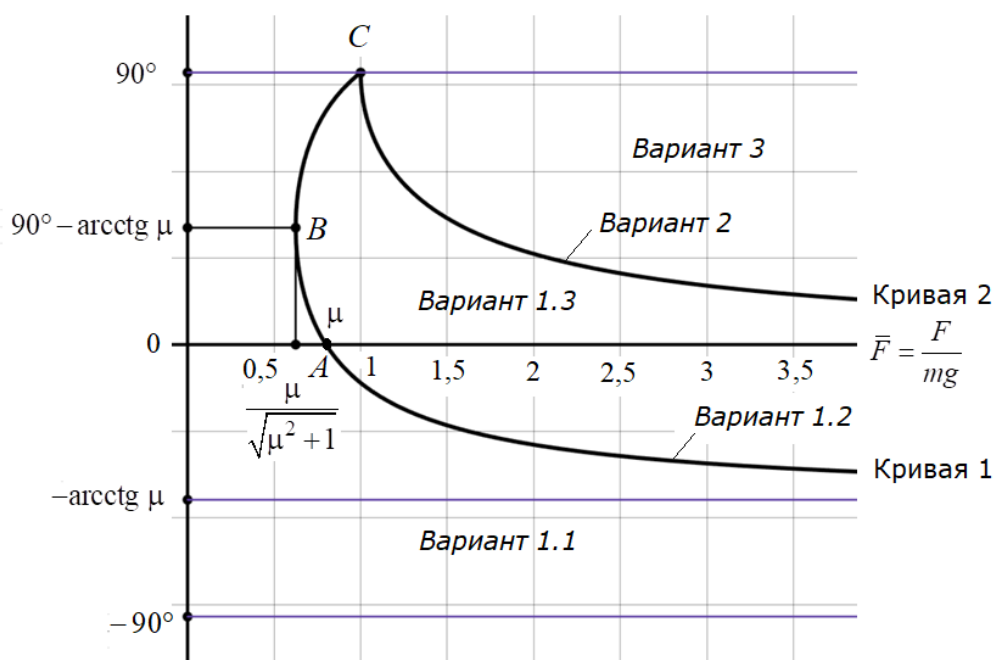


Рис. 4. Графики зависимости допустимых значений угла α в зависимости от относительной силы $\tilde{F} = F/mg$ при $\mu = 0,8$

ВЫВОДЫ

1. Проанализированы все возможные решения для различных случаев движения тела по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы.
2. На примере этой задачи, считающейся в основных учебниках простой и ключевой, показана сложность и обширность полного анализа всех возможных случаев и решений.
3. Представлены графики, описывающие все возможные решения данной задачи.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Гутман В. И., Мощанский В. Н. Алгоритмы решения задач по механике в средней школе: Кн. для учителя. — М.: Просвещение, 1988.
2. Беликов Б. С. Решение задач по физике. Общие методы: Учеб. пособие для студентов вузов. — М.: Высшая шк., 1986.
3. Красин М. С. Решение сложных и нестандартных задач по физике. Эвристические приемы поиска решений. — М.: ИЛЕКСА, 2009.
4. Гринченко Б. И. Как решать задачи по физике. — СПб, НПО «Мир и семья-95», 1998.
5. Бендриков Г.А., Буховцев Б.Б., Керженцев В.В., Мякишев Г.Я. Задачи по физике для поступающих в вузы. — 10-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 344 с.
6. Буховцев Б.Б., Кривченков В.Д., Мякишев Г.Я., Сараева И.М. Сборник задач по элементарной физике. — М.: Наука, 1974. — 416 с.

7. Гольдфарб Н.И. Физика. Задачник. 10–11 кл. — 16-е изд., стереотип. — М.: Дрофа, 2012. — 398 с.
8. Воробьев И.И., Зубков П.И., Кутузова Г.А. и др. Задачи по физике: Учеб, пособие / Под ред. О.Я. Савченко. — 3-е изд., испр. и доп. — Новосибирск: НГУ, 2008. — 370 с.
9. Ащеулов С.В., Барышев В.А. Задачи по элементарной физике. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1974.
10. Касьянов В. А. Физика: 10-й класс: базовый уровень: учебник — 11-е изд., стер. — Москва: Просвещение, 2022.
11. Касьянов В. Л. Физика. Углублённый уровень. 10 класс: учебник. — 8-е изд., стереотип. — М.: Дрофа, 2020.
12. Гофман Ю. В. Законы, формулы, задачи физики. Справочник. — Киев: Наукова думка, 1977.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

Голова Ольга Ивановна,

преподаватель физики высшей квалификационной категории,
Красносулинский колледж промышленных технологий
ГБПОУ РО «ККПТ»)

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена использованию компьютерных технологий при решении известных задач по физике. В ней рассматриваются методы компьютерного моделирования, применение программ, автоматизация вычислений, а также формы организации работы с использованием компьютерных технологий. Особое внимание уделяется преимуществам такого подхода и его влиянию на качество обучения.

Актуальность: современное развитие науки и технологий требует обновления подходов к обучению физике и решениям традиционных учебных задач. Новые решения известных задач позволяют лучше связать школьный курс с реальными инженерными и научными приложениями. Это способствует развитию у учащихся более глубокого понимания физических явлений и формированию исследовательских навыков.

Цель исследования: рассмотреть новые подходы и решения известных важных задач по физике школьного курса в контексте современных образовательных возможностей.

Задачи:

- 1) рассмотреть примеры применения цифровых технологий и компьютерного моделирования при решении задач по физике;
- 2) описать новые методические подходы к постановке и решению известных задач;
- 3) сопоставить классические и обновленные способы решения с точки зрения наглядности и доступности для учащихся.

Задачи, стоящие перед современным человеком, кардинально отличаются от тех, что были актуальны полтора десятилетия назад. Объем доступной информации удваивается примерно каждые два года. Даже для подготовленного студента адаптация к сегодняшней реальности требует особого подхода. Необходимы новое осмысление происходящего и свежие перспективы на стремительные перемены. Современные образовательные учреждения смещают акцент с накопления готовых знаний на развитие навыков их самостоятельного получения. Только тот, кто самостоятельно открывает для себя определенные закономерности или определяет причины явлений и процессов, обретает более прочные шансы на успешную интеграцию в нынешний мир.

В процессе построения целостного мировоззрения дисциплины естественнонаучного профиля играют ключевую роль, при этом именно методика их преподавания претерпевает наибольшие трансформации. Традиционная, механическая подача учебного материала не стимулирует эмоциональную вовлеченность, что неизбежно ведет к потере ученического интереса.

При изучении новых подходов к решению задач важно учитывать уровень подготовки учащихся, их возрастные особенности и цели обучения. Новые методы могут быть более сложными или требовать дополнительных знаний, поэтому их применение должно быть обоснованным.

В школьном курсе физики многие классические задачи решаются стандартными методами, но современные подходы и технологии позволяют взглянуть на них по-новому. Это касается как способов решения, так и инструментов, которые делают процесс более наглядным, эффективным и интересным.

Студенту при наличии персонального компьютера предлагается решить задачи по физике традиционным способом и на компьютере. При такой последовательности решения задачи студент проходит все стандартные этапы традиционного решения задач по физике и программированию.

Известно, что в процессе решения любой физической задачи можно выделить стандартные этапы, перечисленные ниже.

1. Внимательное прочтение условия для уяснения постановки задачи (выделение исходных данных, искомой величины).
2. Запись краткого условия задачи, сопровождающаяся введением обозначений физических величин, используемых в решении, перевод единиц измерения всех данных в задаче величин в систему измерений СИ.
3. Графическое оформление задачи в тех случаях, где это необходимо (рисунки, графики, схемы с обозначением всех величин).
4. Составление исходных уравнений, выражающих соответствующие физические законы.
5. Решение этих уравнений и получение ответа или в аналитической (в виде формул), или в численной форме.

Процесс разработки программы для решения задачи на компьютере, решенной классическим, традиционным способом разбивается на три этапа.

1. Составление алгоритма, формы программы (внешний вид программы).
2. Этап непосредственного программирования, когда формулы классического решения физической задачи переводятся в электронный вид, задаются переменные и процедуры, в результате выполнения которых происходит вычисление и вывод данных в специально отведенной области.

3. Отладка программы (исправление синтаксических и логических ошибок).

При этом важно, что как для решения задачи традиционным способом, так и для разработки программы решения задачи на компьютере студенту необходимо знание основных понятий и определений физики, соответствующих физических законов, а также умение правильно применять эти законы в конкретной ситуации.

Для развития интеллектуального потенциала и повышения мотивации к обучению студента, а также учета его физико-математических знаний и подготовки по программированию все предлагаемые задачи разделены на четыре уровня сложности по начальным условиям.

Первый уровень сложности представляет собой традиционную физическую задачу, когда по данным начальным условиям необходимо, используя физические законы, рассчитать искомую величину. По результатам решения задачи студенту предлагается разработать программу на объектно-ориентированном языке программирования DELPHI, произвести расчеты с помощью компьютера и сопоставить полученные ответы.

В качестве примера рассмотрим типовую задачу механики о движении тела, брошенного под углом к горизонту.

Из точки с координатами x_0, y_0 тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью ϑ_0 . На тело действует попутный горизонтальный ветер, сообщая ему постоянное ускорение a . Найти время полета t , наибольшую высоту $h_{\max}$ и наибольшую дальность $x_{\max}$.

Данную задачу можно рассматривать как задачу первого уровня сложности.

Традиционное решение имеет следующий вид.

Уравнения движения тела в проекциях на оси координат:

$$x - x_0 = \vartheta_0 t \cos \alpha + \frac{at^2}{2}; \quad y - y_0 = \vartheta_0 t \sin \alpha + \frac{gt^2}{2}.$$

Проекции скорости:

$$\vartheta_x = \vartheta_0 t \cos \alpha + at; \quad \vartheta_y = \vartheta_0 t \sin \alpha + gt.$$

Рассмотрим отдельно вертикальное и горизонтальное движения. Для вертикального движения находим:

$$h_{\max} = y_{\max} = \frac{\vartheta_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}; \quad t = \frac{2\vartheta_0 \sin \alpha}{g}.$$

Для горизонтального движения подставляем в формулу для x значение $t = \frac{2\vartheta_0 \sin \alpha}{g}$ и получаем:

$$x_{\max} = x_0 + \frac{\vartheta_0^2 \sin 2\alpha}{g} \cdot \left[1 + \frac{a}{g} \operatorname{tg} \alpha \right].$$

После того как задача решена математически с применением законов физики, необходимо разработать внешний вид будущей программы (первый этап в объектно-ориентированном программировании). На заготовке-форме размещаются объекты для ввода, вывода данных и также управляющий элемент, при нажатии на который происходит само вычисление. В нашем случае объектами ввода и вывода информации служит компонент TEdit. Для различных подписей, несущих функцию пояснения, используется компонент TLabel. Для вычисления используется компонент TButton.

Примерный вид формы показан на рисунке 1.

Рис. 1

Далее необходимо обработать событие «нажатие кнопки». Для этого два раза кликнем на компоненте TButton, в нашем примере он имеет подпись «Посчитать».

Программа DELPHI автоматически сгенерирует процедуру, в которой мы должны вписать следующий код:

Procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
var x0,y0,V0,a,α,hmax,T,xmax:real
Begin
x0:=strtocurr(edit1.Text); y0:=strtocurr(edit2.Text); V0:=strtocurr(edit3.Text); a:=strtocurr(edit4.Text); α:=strtocurr(edit8.Text);
hmax:=y0+V0*V0*sin((2α)*3.14/180)/2*9.8; T:=2*V0*sin(α*3.14/180); xmax:=x0+(V0*V0*sin((2*α)*3.14/180)/g)*(1+α*tan(α*3.14/180)/g);
Edit5.Text:=currtostr(T); Edit6.Text:=currtostr(hmax); Edit7.Text:=currtostr(xmax);
end;

1, 3, 7 — автоматически сгенерированные строки при двойном нажатии на компоненте Button1;

2 — резервирование переменных для вычисления;

4 — ввод данных, присваивание переменным исходных данных задачи;

5 — непосредственное решение задачи, в результате которого мы получаем значения переменных согласно введенным формулам;

6 — вывод данных.

Дополнительно в начале программы необходимо указать константу — ускорение свободного падения: const g = 9,8.

После нажатия на клавишу F9 наш код компилируется и запускается готовая программа. В случае если система DELPHI сообщит об ошибках, их необходимо исправить. Если ошибок нет, то нужно проверить правильность получения выходных данных, в нашем случае максимальная высота, максимальная дальность и время полета. Для этого в задачу подставляются начальные условия для нескольких случаев, и полученные данные при решении на бумаге сравниваются с выходными данными диаграммы.

Второй уровень сложности этой же задачи предусматривает, по усмотрению студента или преподавателя, введение дополнительных условий, усложняющих решение задачи первого уровня с последующей доработкой компьютерной программы. В нашем случае будем учитывать угол β наклона плоскости траектории движения тела относительно горизонта. Решение задачи остается тем же, кроме формулы определения высоты подъема тела. Для введения угла β , необходимо домножить исходную формулу на синус угла β . Получим:

$$h_{\max} = y_{\max} = \left(\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} + y_0 \right) \sin \beta$$

Дальность полета и время полета не зависят от угла β наклона плоскости траектории движения тела относительно горизонта.

Примерный вид формы показан на рис. 2.

Процедура расчета значений изменится только в двух строках. В строке резервирования переменных добавится β и в строке, в которой рассчитывается максимальная высота полета.

Проверка работоспособности программы осуществляется тем же способом, как и в предыдущем примере.

Третий уровень сложности предполагает на основе решения задачи первого уровня сложности разработку программы динамической модели поведения физической системы при различных, задаваемых студентом начальных условиях. Повышение уровня сложности до третьего заключается в более сложной программной реализации решения задачи.

Рис. 2

Решение полностью совпадает с первым уровнем сложности. Возможный внешний вид формы представлен на рис. 3.

Вверху формы располагается компонент TChart, на котором происходит динамическое отображение состояние физической системы. TChart имеет три диаграммы. Диаграмма Series1 необходима для отображения движущегося тела, Series2 отображает траекторию полета тела через некоторые промежутки времени, Series3 отображает векторы скорости тела и ветра.

Внизу располагаются пять компонентов TTrackBar, позволяющих в заданном диапазоне варьировать начальные условия задачи. Для управления физической системой используется два компонента TButton. Первый очищает нарисованные ранее траектории полета тела, второй запускает и останавливает модель. Так как программа моделирует физический процесс во времени, то в простейшем случае необходим счетчик времени. Эту функцию выполняет не визуальный компонент TTimer.

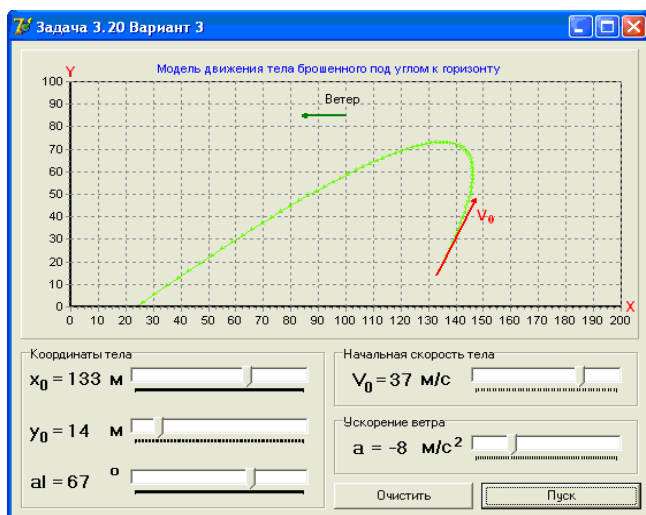


Рис. 3

Внизу располагаются пять компонентов TTrackBar, позволяющих в заданном диапазоне варьировать начальные условия задачи. Для управления физической системой используется два компонента TButton. Первый очищает нарисованные ранее траектории полета тела, второй запускает и останавливает модель. Так как программа моделирует физический процесс во времени, то в простейшем случае необходим счетчик времени. Эту функцию выполняет не визуальный компонент TTimer.

Четвертый уровень сложности предлагает студенту разработать на основе решений задач первого и второго уровней сложности программу динамической модели поведения рассматриваемой в задаче физической системы при различных начальных данных с возможностью введения в задачу дополнительных условий.

Для этого в предыдущую программу студентом или преподавателем добавляются различные дополнительные начальные или конечные условия протекания процесса моделирования. Для нашей исходной задачи это может быть добавление в условие задачи угла β наклона плоскости траектории движения тела относительно горизонта, добавление сопротивления среды, или зависимости кориолисова ускорения при вращении земли. В нашем примере мы используем дополнительное условие: тело продолжает движение после удара с землей. Удар считать упругим.

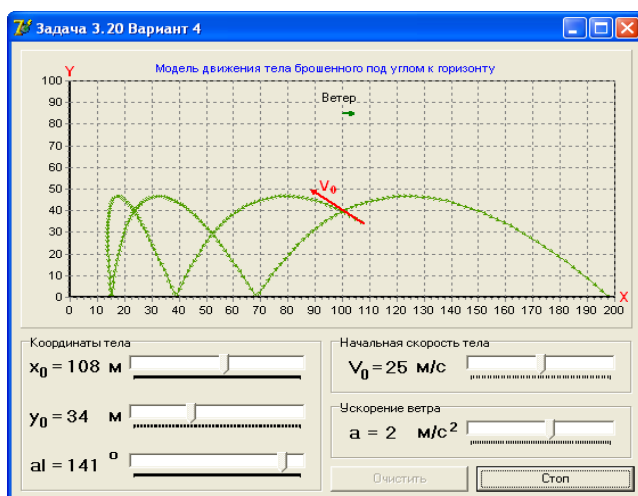


Рис. 4

Физическое решение задачи остается тем же, а вот код программы необходимо доработать лишь в процедуре обработки компонента Timer1. В этой процедуре в предыдущем уровне сложности имеется проверка на тот факт, если тело уже упало на землю.

Оценка работы студента по решению задач по предлагаемой технологии осуществляется по рейтинговой системе: каждый уровень сложности позволяет набрать определенное количество баллов, по сумме которых выставляется оценка. При этом важно, что студенту предоставляется право самому выбрать уровень сложности задачи, соответствующий его физико-математической подготовленности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование изложенной технологии решения задач по физике на компьютере, позволит решить следующие учебно-воспитательные задачи при изучении курса физики на факультетах физики и математики:

- повысить интерес студентов к решению задач по физике в связи с тем, что разработка компьютерной программы невозможна без основательной проработки используемых при решении физических законов, их математического обеспечения;
- обеспечить самостоятельное развитие исследовательского потенциала студента с учетом индивидуальной подготовки по физике и программированию при решении задач (каждый студент изначально сам выбирает уровень сложности задачи, или поэтапно продвигается от первого уровня сложности к последующим);
- приобрести элементарные навыки компьютерного моделирования;
- использовать компьютер для самостоятельного решения задач по физике студентами вне аудиторных занятий.

Дополнительные накладываемые условия зависят от сложности физического процесса, рассматриваемого в задаче. В данном примере, кроме угла β наклона плоскости траектории движения тела относительно горизонта, можно добавить условие сопротивления среды, условие зависимости кориолисова ускорения при вращении Земли и другое.

ВЫВОДЫ

Преимущества использования компьютерных технологий:

- **индивидуализация обучения.** Компьютерные технологии позволяют адаптировать процесс обучения под уровень знаний и потребности каждого студента;
- **повышение мотивации.** Использование интерактивных и мультимедийных материалов делает обучение более интересным и увлекательным;
- **развитие исследовательских навыков.** Решение задач с помощью компьютерных технологий стимулирует аналитическое мышление и самостоятельность;
- **экономия времени.** Автоматизация вычислений и моделирование позволяют решать больше задач за меньшее время;
- **возможность изучения сложных или опасных процессов,** которые невозможно воспроизвести в реальности.

При использовании компьютерных технологий важно учитывать подготовку учителей, наличие необходимого оборудования и методическую составляющую, чтобы максимально эффективно интегрировать эти инструменты в учебный процесс.

Проблемы:

- недостаток качественного программного обеспечения;
- нет компьютера в домашнем пользовании;
- отсутствие демонстрационного центра;

Использование ИКТ дает положительные результаты. При этом важна роль учителя как наставника в организации эффективной учебной деятельности, направленной на формирование знаний учащихся и способности применять их на практике.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Панфилова А. П. Инновационные педагогические технологии: Активное обучение, 2009.
2. Рыбцова Л.Л. и др. Современные образовательные технологии. 2024.
3. Информационно-образовательный портал РБ (<http://www.oprb.ru/>).
4. Фестиваль «Открытый урок» (<http://festival.1september.ru/>).
5. Официальный информационный портал ЕГЭ (<http://www.ege.edu.ru/>).
6. ФИПИ (<http://www.fipi.ru/>).
7. Открытый колледж. Физика (<http://college.ru/physics/>).
8. Физика.ru (<http://www.fizika.ru/>).
9. Российский общеобразовательный портал (<http://www.school.edu.ru/>).
10. Единая коллекция образовательных ресурсов (<http://school-collection.edu.ru/>).

ГАПОУ РО «РКТМ»

**Областной конкурс
творческих работ
«ПЕДАГОГИ — НАУКЕ»**

**РАБОТЫ
В НОМИНАЦИИ
«МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
ИССЛЕДОВАНИЯ»**

СНОВА О ТРЕУГОЛЬНИКЕ ШАРЫГИНА

Шульга Сергей Анатольевич,

к. т. н., преподаватель физики высшей квалификационной категории,
Ростовский колледж технологий машиностроения
(ГБПОУ РО «РКТМ»)

АННОТАЦИЯ

Цель данной работы — разобрать известные на сегодня сведения о решениях задачи Шарыгина о разностороннем треугольнике, биссектральный треугольник которого равнобедренный.

Приведены 4 решения задачи о треугольнике Шарыгина для биссектрис; из них только одно присутствует в источниках, доступных и известных автору настоящей работы. Все решения проиллюстрированы соответствующими графиками.

Показано, что треугольники Шарыгина существуют и для высот, определены параметры этих треугольников. Тем самым показано, что даже среди самых замечательных прямых треугольника существование треугольников Шарыгина не является уникальным свойством только биссектрис.

ВВЕДЕНИЕ

Тема треугольника Шарыгина популярна в геометрии и вызывает у некоторых авторов, пишущих на эту тему, большие эмоции — по одноименному запросу Интернет дает ссылки на такие, например, статьи: «Существование треугольника Шарыгина — это настоящее математическое чудо», «Единственный в своём роде треугольник Шарыгина, открытый лишь в 1982 году», «Самый нереальный из треугольников — треугольник Шарыгина» [1–3].

Есть статья о треугольнике Шарыгина и в Википедии; в ней он определен как треугольник, не являющийся равнобедренным, основания биссектрис которого образуют равнобедренный треугольник [4]. Поскольку треугольник с вершинами в основаниях биссектрис называется биссектральным, то более короткое определение треугольника Шарыгина — разносторонний треугольник, биссектральный треугольник которого равнобедренный.

Отметим, что название «биссектральный треугольник» принадлежит И. А. Кушнiru: как он указывает в [5], «в конце восьмидесятых годов XX столетия на семинаре киевских учителей математики я представил формулу угла этого треугольника, назвав его биссектральным»; более подходящим было бы, видимо, название «биссектрисный» — с учетом того, что суффикс -н- в русском языке более продуктивен, чем -альн-, и того, что соответствующий треугольник для высот называется высотным.

Название «треугольник Шарыгина» может быть обобщено — это разносторонний треугольник, какой-либо из чевианных треугольников которого равнобедренный.

Сам И. Ф. Шарыгин описал названный в его честь треугольник в двух своих задачниках [6–7], одной книге [8] и одной статье [9], еще в одной статье треугольник только упоминается [10], в других его многочисленных книгах и статьях слов о треугольнике нет.

Формулировка рассматриваемой задачи, данная И. Ф. Шарыгиным в [6–7, 9]:

про данный треугольник известно, что треугольник, образованный основаниями его биссектрис, является равнобедренным. Можно ли утверждать, что и данный треугольник равнобедренный?

При этом интересно то, что в статье [9] эта задача названа автором «забавной вариацией на ту же тему» (на тему задачи Штейнера–Лемуса: если в треугольнике равны две биссектрисы, то треугольник равнобедренный).

В книге [8] задача поставлена чуть по-другому (цитируем расширенно в целях последующего анализа):

«Еще неожиданнее ответ на следующий вопрос. Известно, что треугольник с вершинами в основаниях биссектрис данного треугольника является равнобедренным. Следует ли из этого, что и данный треугольник является равнобедренным? (Для медиан и высот ответ на аналогичный вопрос будет утвердительным.) Ответ: вообще говоря, не следует. Пока, правда, ничего уж слишком неожиданного в этом ответе для нас нет. Неожиданность кроется в том, что стоит за этим оборотом «вообще говоря». Оказывается, что если в $\triangle ABC$ выполняется равенство $A_1B_1 = B_1C_1$, где A_1, B_1, C_1 — основания биссектрис этого треугольника, то возможны треугольники, в которых $AB \neq BC$, но у всех таких треугольников угол B будет заключен в интервале от (приблизительно) $102^\circ 40'$ до $104^\circ 28'$ (концы интервала соответствуют углам, косинусы которых равны $\frac{\sqrt{17}-5}{4}$ и $-\frac{1}{4}$). Во всех остальных случаях имеет место равенство $AB = BC$ ».

Формулировка задачи в книге [11] в статье В. Ю. Протасова и В. М. Тихомирова «Геометрические шедевры И. Ф. Шарыгина»:

«обязательно ли является равнобедренным треугольник, если треугольник с вершинами в основаниях его биссектрис — равнобедренный? Решение этой задачи не столь простое, как может показаться на первый взгляд. Это один из немногих случаев, когда И.Ф. Шарыгин не нашёл геометрического решения задачи и прибег к вычислениям. Скорее всего, чисто

геометрического решения здесь не существует, что ясно уже из ответа. А ответ весьма неожиданный: треугольник не обязательно равнобедренный, но только в том случае, когда один из его углов лежит в интервале $\left(-\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{17}-5}{4}\right)$, т. е. примерно от 102° до 104° . Если же

треугольник не имеет тупых углов или имеет, но тупой угол не лежит в этом узком интервале, то треугольник обязательно равнобедренный».

Для полноты картины приведем ещё длинную цитату из статьи [12]: «В самом начале изучения геометрии в школе доказывают теоремы о том, что если треугольник равнобедренный, то у него равны соответствующие углы, медианы, биссектрисы и высоты. Верны и обратные утверждения, а именно: если у треугольника два угла или две медианы (высоты, биссектрисы) равны, то этот треугольник равнобедренный... По аналогии мы готовы предположить, что если в треугольнике взять два других однотипных элемента, то из их равенства будет следовать равнобедренность исходного треугольника.

Возьмём произвольный треугольник и рассмотрим в нём треугольники, образованные основаниями медиан, высот или биссектрис. Нетрудно доказать, что в равнобедренном треугольнике основания медиан, высот или биссектрис также образуют равнобедренный треугольник. Интуитивно мы ожидаем, что если рассмотреть обратные утверждения, то они также окажутся верными. Проверка для случая медиан и высот подтверждает этот факт. Тем поразительнее кажется задача, придуманная И. Ф. Шарыгиным, о том, что существуют разносторонние треугольники такие, что треугольники, образованные основаниями их биссектрис, являются равнобедренными».

1. ЕСТЬ ЛИ ОСНОВАНИЯ ДЛЯ УДИВЛЕНИЯ, И ЕСЛИ ЕСТЬ, ТО ГДЕ ОНИ?

Такие основания есть. Перечислим по порядку.

1

Дело в том, что часть статьи [9], посвященную рассматриваемому треугольнику, И. Ф. Шарыгин завершает словами: «Подробное решение этой задачи дается в книге И. Ф. Шарыгина «Задачи по геометрии (планиметрия)» (М., Наука, 1982), с. 157. К сожалению, автор не сумел построить конкретный пример треугольника (то есть точно указать величины всех его углов или длины сторон) со столь экзотическим свойством. Может быть, это удастся читателям журнала?»

Действительно, тексты И. Ф. Шарыгина по одноименному треугольнику заканчиваются доказательством того, что в случае равнобедренного биссектрального треугольника исходный треугольник — не обязательно равнобедренный, но только в том случае, когда один из углов исходного треугольника тупой и его косинус находится в интервале $\left(-\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{17}-5}{4}\right)$.

То есть полного решения задачи И. Ф. Шарыгин не дает, что и сам отмечает словами «автор не сумел построить конкретный пример треугольника (то есть точно указать величины всех его углов или длины сторон) со столь экзотическим свойством» (отметим, что при этом неясно, к чему тогда предыдущее предложение начинается словами: «Подробное решение этой задачи дается в книге И. Ф. Шарыгина...»).

Удивительно здесь то, что в решениях, данных И. Ф. Шарыгиным, по сути заключено и полное решение задачи — остается только решить два приведенных им несложных уравнения (это покажем ниже; имеются в виду уравнения (1) и (4) ниже).

А именно: уравнение (1) — кубическое уравнение и не более того; решения кубического уравнения приведены даже в Википедии (слово «даже» употреблено потому, что сейчас «с Википедии всё начинается», — имеется в виду, естественно, первичное ознакомление с любой темой, с фактами «для чайников»). Кроме того, квадратное относительно $\bar{b}$ уравнение (4) (т. е. школьное уравнение) немедленно дает параметрическое решение (см. ниже).

2

И еще раз о словах «автор не сумел построить конкретный пример треугольника... Может быть, это удастся читателям журнала?» — эти слова имеют интересный результат: впредь разными авторами ставилась задача привести именно «конкретный пример треугольника (то есть точно указать величины всех его углов или длины сторон)», а не собственно решить задачу, т. е. решить уравнение (1) или (4).

Более того, в 6-м номере журнала «Квант» за 2006 год приводится решение задачи М2001 из «Задачника “Кванта”»: «Дан треугольник ABC , в котором проведены биссектрисы AA_1 , BB_1 и CC_1 . Известно, что величины углов A , B и C относятся как 4:2:1. Докажите, что $A_1B_1 = A_1C_1$ » [13].

Собственно об этой задаче — ниже в п. 7; сейчас же приведем замечание, завершающее её решение: «Эта задача связана со следующим вопросом: верно ли, что треугольник равнобедренный, если треугольник с вершинами в основаниях его биссектрис равнобедренный? То, что ответ на этот вопрос неожиданно оказывается отрицательным, известно достаточно давно, однако вызывала интерес возможность построить пример треугольника с явными величинами углов (см. статью И. Шарыгина «Вокруг биссектрисы» в Приложении к журналу «Квант» №1 за 1998 г.). Треугольник ABC из данной задачи является, вероятно, первым таким примером».

Однако в 10-м номере журнала «Математика в школе» за тот же 2006 год опубликована статья «Вариации на тему “Треугольник Шарыгина”» [14], начало которой такое: указывается решение И. Ф. Шарыгина в задачнике 1982 года [6], далее отмечается: «А в 1983 г. на страницах журнала “Квант” в статье “Вокруг биссектрисы” он опять обращает внимание читателей на эту задачу и пишет: “К сожалению, автор не сумел построить конкретный пример треугольника (т. е. точно указать величины всех его углов или длины сторон) со столь экзотическим свойством”. Такой треугольник найден и назван нами “Треугольником Шарыгина” [15]».

Журнал [15] 1999 года, на который ссылаются авторы, в Интернете не представлен, так что понять, кто именно автор первого примера треугольника Шарыгина, затруднительно.

3

И ещё одно: в теме треугольника Шарыгина регулярно употребляются, как мы видим, определения «неожиданный», «уникальный», «поразительный» — это по отношению к тому, что «нетрудно доказать, что в равнобедренном треугольнике основания медиан, высот или биссектрис также образуют равнобедренный треугольник. Интуитивно мы ожидаем, что если рассмотреть обратные утверждения, то они также окажутся верными. Проверка для случая медиан и высот подтверждает этот факт» [12].

В статье [16] предлагается к решению и соответствующая задача: «Докажите, что треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда его чевианный треугольник, построенный по его *a*) высотам, *б*) медианам, также является равнобедренным».

Так же говорится и в начале соответствующей статьи в Википедии [4]: «Треугольники Шарыгина представляют интерес, так как существуют в отличие от аналогичных треугольников, в определении которых вместо биссектрис использованы, например, медианы или высоты».

И сам И. Ф. Шарыгин отмечает: «Известно, что треугольник с вершинами в основаниях биссектрис данного треугольника является равнобедренным. Следует ли из этого, что и данный треугольник является равнобедренным? (Для медиан и высот ответ на аналогичный вопрос будет утвердительным)» [8].

Обращаем внимание на то, что все это говорится о медианах, высотах и биссектрисах, — как «самых замечательных» из большого множества замечательных прямых в треугольнике.

Так вот, как будет показано ниже в п. 8, рассматриваемое свойство биссектрис вовсе не экзотично, т. к. оно присуще ещё и высотам, — в отличие от того, что, как мы видим, утверждается о высотах, в том числе и самим И. Ф. Шарыгиным.

2. РЕШЕНИЕ И. Ф. ШАРЫГИНА

Поскольку далее будут рассмотрены некоторые особенности решения И. Ф. Шарыгина, приведем его из задачник [6–7] с изменением некоторых обозначений на используемые нами ниже; это решение приведено и в Википедии [4].

Задача: про данный треугольник известно, что треугольник, образованный основаниями его биссектрис, является равнобедренным. Можно ли утверждать, что и данный треугольник равнобедренный?

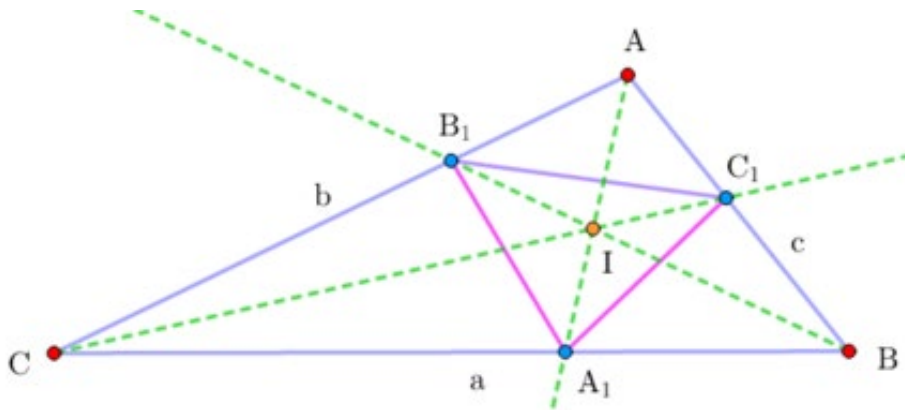


Рис. 1. Чертеж из статьи Википедии [4]

Пусть ABC — данный треугольник, AA_1 , BB_1 , CC_1 — биссектрисы. Если $A_1B_1 = A_1C_1$, то или $\angle A_1B_1C = \angle A_1C_1B$ (в этом случае $\triangle ABC$ будет равнобедренным) или $\angle A_1B_1C + \angle A_1C_1B = 180^\circ$. Во втором случае повернем $\triangle A_1B_1C$ вокруг точки A_1 на угол $\angle B_1A_1C_1$. В результате треугольники A_1C_1B и A_1B_1C окажутся приложенными друг к другу и образуют треугольник,

подобный $\triangle ABC$. Если стороны $\triangle ABC$ есть a , b и c , то стороны получившегося треугольника будут равны $\frac{ac}{b+c}$, $\frac{ab}{b+c}$ и $\frac{ac}{a+b} + \frac{ab}{a+c}$. Из их подобия находим: $\frac{c}{a+b} + \frac{b}{a+c} = \frac{a}{b+c}$, откуда

$$a^3 + (b+c)a^2 - (b^2 + bc + c^2)a - (b^3 + b^2c + bc^2 + c^3) = 0. \quad (1)$$

Обозначим $\cos \angle BAC = t$. По теореме косинусов $b^2 + c^2 - a^2 = 2bct$. Умножая последнее равенство последовательно на a , b и c и вычитая из (1), получим $2t(a+b+c) + a = 0$, т. е.

$$a = -\frac{2(b+c)t}{2t+1}. \quad (2)$$

Поскольку $0 < a < b+c$, то $-\frac{1}{4} < t < 0$. (3)

Заменив в теореме косинусов a через b , c и t , получим уравнение

$$(4t+1)\bar{b}^2 - 2t(4t^2 + 8t + 1)\bar{b} + 4t + 1 = 0, \quad (4)$$

где обозначено $\bar{b} = b/c$. Для того чтобы это уравнение при условиях (3) имело решение ($\bar{b} > 0$, $\bar{b} \neq 1$), должны выполняться неравенства

$$4t^3 + 8t^2 + t > 0; \quad (5)$$

$$D/4 = (4t^3 + 8t^2 + t)^2 - (4t+1)^2 = (2t+1)^2(t+1)(2t-1)(2t^2 + 5t + 1) > 0, \quad (6)$$

где D — дискриминант квадратного уравнения. Система неравенств (3), (5), (6) удовлетворяется при $-\frac{1}{4} < t < \frac{\sqrt{17}-5}{4}$.

Таким образом, исходный треугольник — не обязательно равнобедренный. Однако доказано, что это может иметь место только в том случае, когда один из углов исходного треугольника тупой и его косинус находится в интервале $\left(-\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{17}-5}{4}\right)$, что для самого угла A соответствует интервалу $(102^\circ 40'; 104^\circ 28')$ (значения в градусной мере приближенные).

Если $t = -\frac{1}{4}$, построенный треугольник будет вырождаться, при $t = \frac{\sqrt{17}-5}{4}$ будем иметь $\angle A_1B_1C = \angle A_1C_1B = 90^\circ$, т. е. два случая, которые выделены в начале решения, для этого значения угла совпадают.

Решение в задачниках на этом заканчиваются, в статье же [9] есть следующее добавление: «Обратно, для любого угла α из этого интервала можно указать единственный (с точностью до подобия) неравнобедренный треугольник ABC с $\angle A = \alpha$, для которого $A_1B_1 = A_1C_1$ ».

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (1)

Как уже отмечено выше, удивительно то, что И. Ф. Шарыгин не указал корни уравнения (1), которые и являются решением данной задачи.

Сначала выведем это уравнение другим, чем это у И. Ф. Шарыгина, способом.

Известна формула для угла α_1 (рис. 2):

$$\operatorname{ctg} \alpha_1 = \frac{1 + 2 \cos \alpha}{2(\sin \beta + \sin \gamma)}, \quad (7)$$

аналогично для углов β_1 и γ_1 . Вывод этой формулы связан с определением по теореме синусов углов α_2, α_3 и использованием равенства

$$\operatorname{ctg} \alpha_1 = \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha_2 - \alpha_3) = \frac{1 - \operatorname{ctg} \alpha_2 \operatorname{ctg} \alpha_3}{\operatorname{ctg} \alpha_2 + \operatorname{ctg} \alpha_3}. \quad (8)$$

При этом (рис. 2) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{c}{b}$; $a_2 = a - a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{ac}{b+c}$; $c_2 = \frac{ac}{b+c}$.

Кроме того, $\frac{a_1}{\sin \gamma_3} = \frac{c_2}{\sin \alpha_2}$; $\gamma_3 = 180^\circ - \beta - \alpha_2$, т. е. находим:

$$\operatorname{ctg} \alpha_2 = \frac{a+b-(b+c)\cos \beta}{(b+c)\sin \beta}; \quad \operatorname{ctg} \alpha_3 = \frac{a+c-(b+c)\cos \gamma}{(b+c)\sin \gamma}.$$

Подстановка этих выражений в (8) и вывод уравнения (7) — интересное школьное упражнение, совсем не простое; в частности, при этом следует использовать такие соотношения, как $c = b \cos \beta + a \cos \gamma$; $c \sin \beta = b \sin \gamma$ и им подобные.

Другой вывод формулы (7) приведен в книге И. А. Кушнина [5].

Преобразуем теперь эту формулу: так как $\sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha$; $\sin \gamma = \frac{c}{a} \sin \alpha$, то получаем

$$\operatorname{ctg} \alpha_1 = \frac{1 + 2 \cos \alpha}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{a}{b+c},$$

аналогично $\operatorname{ctg} \beta_1 = \frac{1 + 2 \cos \beta}{2 \sin \beta} \cdot \frac{b}{a+c}$; $\operatorname{ctg} \gamma_1 = \frac{1 + 2 \cos \gamma}{2 \sin \gamma} \cdot \frac{c}{a+b}$. (9)

Используем далее равнобедренность $\Delta A_1 B_1 C_1$: $\operatorname{ctg} \beta_1 = \operatorname{ctg} \gamma_1$, т. е. из (9) находим:

$$\frac{1 + 2 \cos \beta}{1 + 2 \cos \gamma} = \frac{a+c}{a+b} \cdot \frac{c}{b}.$$

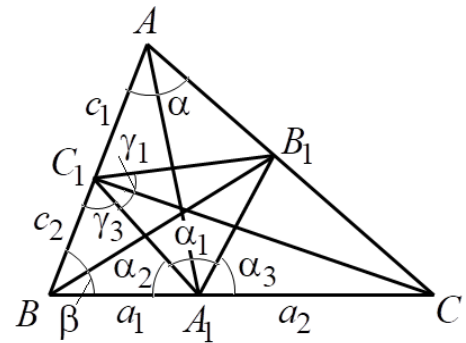


Рис. 2. Биссектральный треугольник

Уравнение (1) получаем, подставив в последнее выражение формулы для косинусов:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Поскольку нас интересуют в первую очередь отношения сторон, то разделив уравнение (1) на c (т. е. принимая $c = 1$), имеем кубическое уравнение относительно $\bar{a} = \frac{a}{c}$, $\bar{b} = \frac{b}{c}$:

$$\bar{a}^3 + (\bar{b} + 1)\bar{a}^2 - (\bar{b}^2 + \bar{b} + 1)\bar{a} - (\bar{b}^3 + \bar{b}^2 + \bar{b} + 1) = 0, \text{ или } \bar{a}^3 + l\bar{a}^2 + m\bar{a} + n = 0, \quad (10)$$

где, очевидно, $l = \bar{b} + 1$; $m = -(\bar{b}^2 + \bar{b} + 1)$; $n = -(\bar{b}^3 + \bar{b}^2 + \bar{b} + 1)$.

Так как у уравнения (10) три вещественных корня, то формула Кардано не подходит; используем тригонометрическую формулу Виета и получаем такие корни [17]:

$$\bar{a} = \sqrt{-\frac{4}{3}P} \sin\left(\frac{1}{3}(D + 2\pi)\right) - \frac{l}{3}; \quad (11)$$

$$\bar{a}_1 = \sqrt{-\frac{4}{3}P} \sin\left(\frac{1}{3}D\right) - \frac{l}{3}; \quad \bar{a}_2 = \sqrt{-\frac{4}{3}P} \sin\left(\frac{1}{3}(D + 4\pi)\right) - \frac{l}{3},$$

где $D = \arcsin\left(\frac{9Q}{4P^2} \sqrt{-\frac{4}{3}P}\right)$, $P = m - \frac{l^2}{3} = -\frac{1}{3}(4\bar{b}^2 + 5\bar{b} + 4)$,

$$Q = \frac{2}{27}l^3 - \frac{lm}{3} + n = -\frac{1}{27}(16\bar{b}^3 + 3\bar{b}^2 + 3\bar{b} + 16).$$

Нужное нам решение — формула (11), поскольку корни $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ отрицательные; это показано на рис. 3 — графике функции $y = f(\bar{a})$, где $f(\bar{a})$ — левая часть уравнения (4) при $\bar{b} = 0,5$.

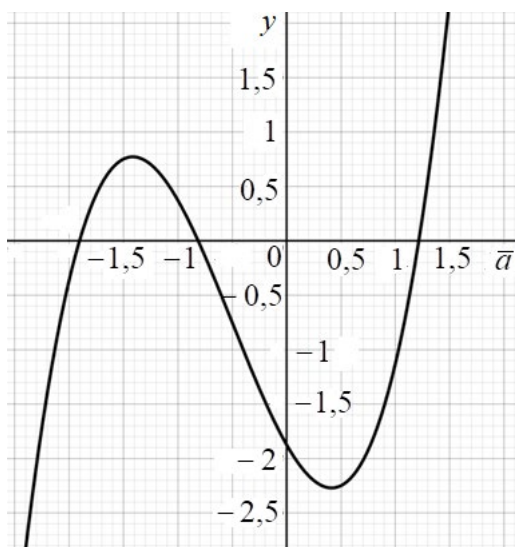


Рис. 3. График функции $y = f(\bar{a})$, где $f(\bar{a})$ — левая часть уравнения (4) при $\bar{b} = 0,5$

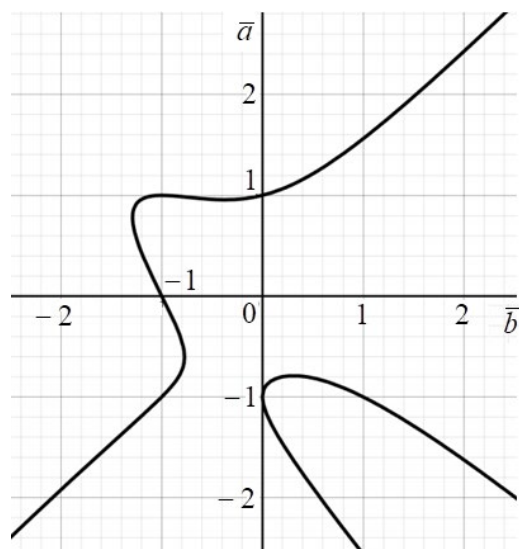


Рис. 4. График зависимости $\bar{a} = f(\bar{b})$ по уравнению (1)

На рис. 4 представлен график зависимости $\bar{a} = f(\bar{b})$, построенный по уравнению (1).

Принимая то или иное значение $\bar{b}$, получаем бесконечное множество частных примеров, которые хотел видеть И. Ф. Шарыгин.

В частности, на рис. 5 представлены треугольники Шарыгина, построенные при $\bar{c} = 1$ и различных значениях $\bar{b}$ с определением $\bar{a}$ по формуле (11): $\bar{b} = 0,1; 0,5; 1; 3; 8; 1000$.

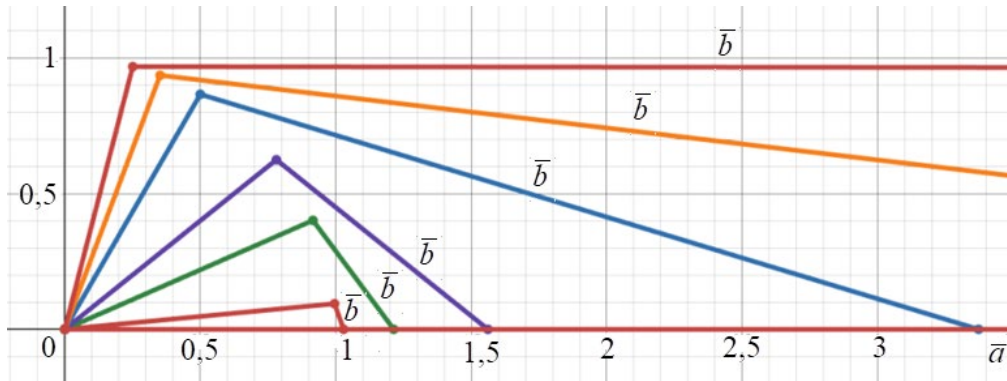


Рис. 5. Треугольники Шарыгина, построенные при $\bar{c} = 1$ и различных значениях $\bar{b}$ с определением $\bar{a}$ по формуле (11): $\bar{b} = 0,1; 0,5; 1; 3; 8; 1000$.

4. ПЕРВОЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Вернемся к квадратному уравнению (4) в текстах И. Ф. Шарыгина; его 2 корня вместе с выражением (2) дают параметрическое решение уравнения (1), т. е. в текстах И. Ф. Шарыгина, собственно, и записано полное решение рассматриваемой задачи (с учетом «школьной тривиальности» решения квадратного уравнения). Итак:

$$\begin{aligned}\bar{b}_1 &= \frac{A - \sqrt{A^2 - (4t+1)^2}}{4t+1}, \\ \bar{a}_1 &= -\frac{2(\bar{b}_1+1)t}{2t+1},\end{aligned}\quad (12)$$

где $t = \cos \alpha$; $A = t(4t^2 + 8t + 1)$;

$$\begin{aligned}\bar{b}_2 &= \frac{A + \sqrt{A^2 - (4t+1)^2}}{4t+1}, \\ \bar{a}_2 &= -\frac{2(\bar{b}_2+1)t}{2t+1},\end{aligned}\quad (13)$$

причем в этих же текстах И. Ф. Шарыгина показано, что

$$-\frac{1}{4} < t < \frac{\sqrt{17}-5}{4}, \quad (14)$$

или $-0,25 < t < -0,2192\dots$

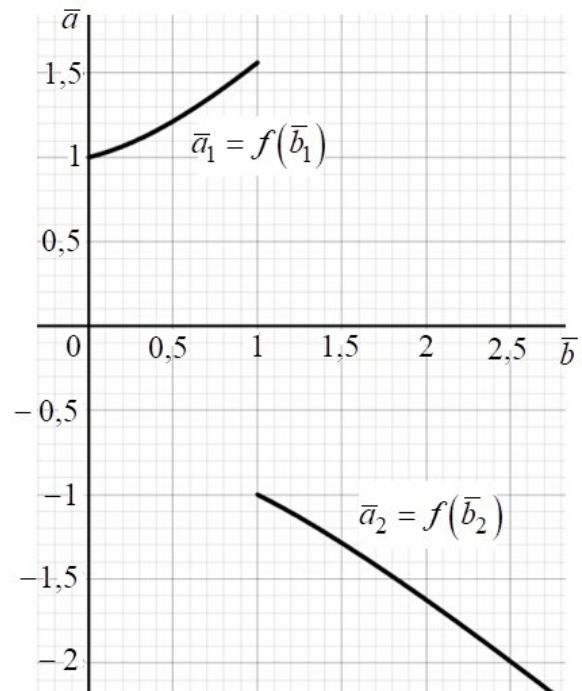


Рис. 6. Графики $\bar{a}_1 = f(\bar{b}_1)$ и $\bar{a}_2 = f(\bar{b}_2)$ по уравнениям (12)–(13)

Школьный уровень данного решения подтверждается наличием в Интернете работы Марии Тихоновой со школьного конкурса [18].

На рис. 6 представлены графики функций $\bar{a}_1 = f(\bar{b}_1)$ и $\bar{a}_2 = f(\bar{b}_2)$, построенные по уравнениям (12)–(13); как видно, значения $\bar{a}_2$ и $\bar{b}_2$ отрицательны и нам не подходят.

Приведем пример расчета: при $t = -0,23$ имеем $\bar{a}_1 = 1,1091\dots$; $\bar{b}_1 = 0,3019\dots$

5. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ (1)

Рассмотрим уравнение (1). Приведем его к виду

$$(a^2 - b^2 - c^2)(a + b + c) = abc, \quad (15)$$

находим с учетом того, что $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$:

$$(16)$$

$$\cos \alpha = -\frac{a}{2(a+b+c)} \quad \text{или} \quad \cos \alpha = -\frac{\bar{a}}{2(\bar{a} + \bar{b} + 1)}. \quad (17)$$

При $b \rightarrow 0$ имеем из уравнения (1):

$$a^3 + ca^2 - c^2a - c^3 = 0, \quad (a+c)^2(a-c) = 0, \quad \text{т. е. } a \rightarrow c, \quad \text{причем по (17) } \cos \alpha \rightarrow -\frac{1}{4}.$$

При $b \rightarrow \infty$ получаем из (1):

$$a^3 + ba^2 - b^2a - b^3 = 0, \quad (a+b)^2(a-b) = 0, \quad \text{т. е. } a \rightarrow b, \quad \text{и опять по (17) } \cos \alpha \rightarrow -\frac{1}{4}.$$

Итак, на концах луча $b > 0$ величина $\cos \alpha$ принимает одинаковые значения; значит, она постоянна или должен быть экстремум. Поскольку очевидно, что $\cos \alpha$ при $b > 0$ не постоянен, то определим этот экстремум.

По первому уравнению (17) имеем из условия $\frac{d \cos \alpha}{db} = 0$ при фиксированном значении c :

$$\frac{da}{db} = -\frac{a}{b+c}.$$

По тому же условию из второго уравнения (17) находим: $\frac{da}{db} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ (интересно то, что это $\cos \angle C$).

Из двух последних выражений получаем:

$$(b-c)(b+c-a)(a+b+c) = 0.$$

Поскольку по неравенству треугольника $b+c-a \neq 0$, то единственное решение $b = c$.

При этом из (1) получаем уравнение $a^3 + 2ca^2 - 3c^2a - 4c^3 = 0$ с корнями $a = -c$ и $a = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}c$.

Нужное нам решение: $a = \frac{\sqrt{17}-1}{2}c$; $b = c$ или $\bar{a} = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$; $\bar{b} = 1$.

По (17) находим: $\cos \alpha = \frac{\sqrt{17}-5}{4}$, как и должно быть в соответствии с (14).

На рис. 7 показано положение экстремума на графике функции $\alpha = f(\bar{b})$, построенном по зависимости (17).

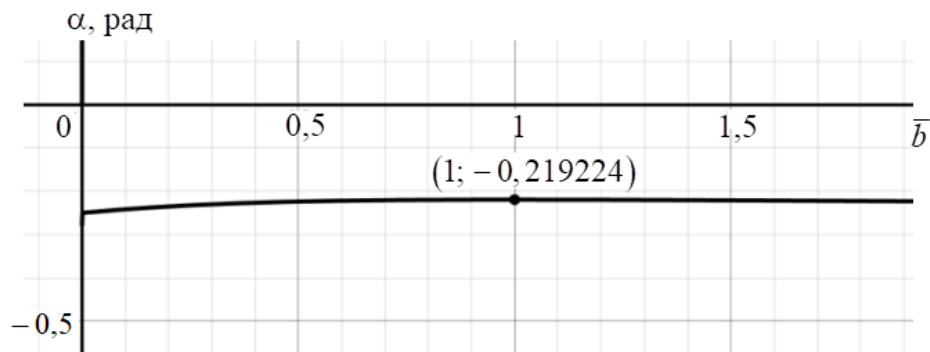


Рис. 7. График функции $\alpha = f(\bar{b})$, построенный по зависимости (17)

6. ВТОРОЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Есть ещё параметрический способ решения уравнения (1): выполняем замену $a = x + y$; $b = x + z$; $c = y + z$ и подставляем это в (); находим:

$$4z^3 + 9(x+y)z^2 + [5(x+y)^2 - 4xy]z - 3xy(x+y) = 0.$$

Теперь принимаем $z = 1$ и приходим к квадратному уравнению

$$(5-3x)y^2 + (-3x^2 + 6x + 9)y + 5x^2 + 9x + 4 = 0.$$

При этом для a , b и c получаем, переобозначив x через t :

$$a = \frac{-3t^2 + 4t - 9 \pm K}{2(5-3t)}; \quad b = t+1; \quad c = \frac{3t^2 - 12t + 1 \pm K}{2(5-3t)}, \quad \text{где } K = \sqrt{(t^2-1)(9t^2+24t-1)}.$$

Переходим к решению с $c = 1$; это и есть параметрическое решение, соответствующее приведенным выше решениям:

$$\bar{a}_1 = \frac{-3t^2 + 4t - 9 - K}{3t^2 - 12t + 1 - K}; \quad \bar{b}_1 = \frac{2(t+1)(5-3t)}{3t^2 - 12t + 1 - K}, \quad (18)$$

$$\bar{a}_2 = \frac{-3t^2 + 4t - 9 + K}{3t^2 - 12t + 1 + K}; \quad \bar{b}_2 = \frac{2(t+1)(5-3t)}{3t^2 - 12t + 1 + K}. \quad (19)$$

На рис. 8 представлены графики $\bar{a}_1 = f(\bar{b}_1)$ и $\bar{a}_2 = f(\bar{b}_2)$; как видно, значения $\bar{a}_2$ и $\bar{b}_2$ отрицательны и нам не подходят.

Можно показать, что условия $\bar{a} > 0$; $\bar{b} > 0$ выполняются при $t > \frac{5}{3}$; это видно и по графикам $\bar{a}_1 = f(t)$ и $\bar{b}_1 = f(t)$ на рис. 9.

Кроме того, при $t \rightarrow \infty$ из (18) следует: $\bar{a} \rightarrow \frac{3}{8}t \rightarrow \infty$; $\bar{b} \rightarrow \frac{3}{8}t \rightarrow \infty$.

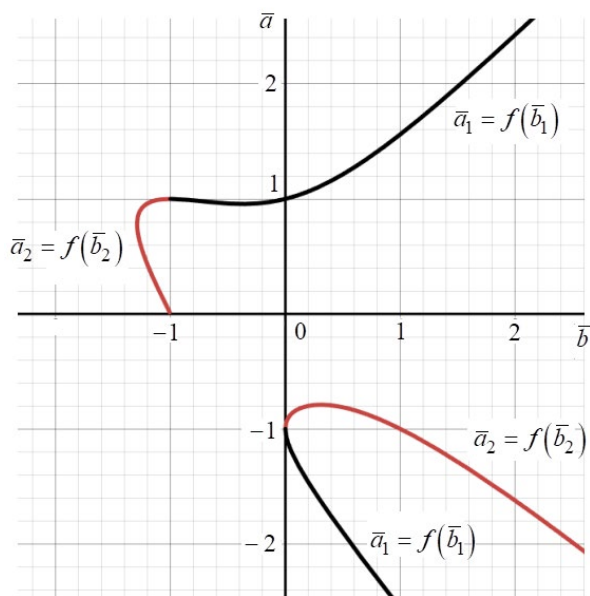


Рис. 8. Графики $\bar{a}_1 = f(\bar{b}_1)$ и $\bar{a}_2 = f(\bar{b}_2)$, построенные по уравнениям (18)–(19)

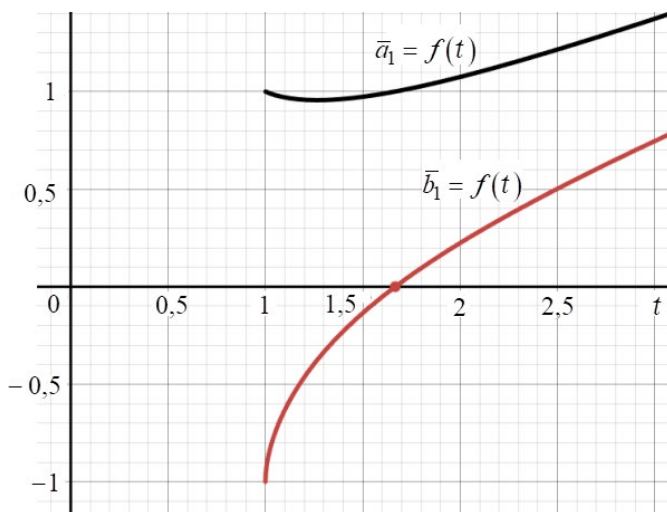


Рис. 9. Графики $\bar{a}_1 = f(t)$ и $\bar{b}_1 = f(t)$, построенные по уравнениям (18)–(19)

Таким образом, пределы изменения параметра t в данном решении есть именно $t > \frac{5}{3}$.

Приведем пример расчета: при $t = 1000$ имеем $\bar{a} = 375,1252\dots$; $\bar{b} = 374,8742\dots$. Такое же значение $\bar{a}$ получаем, подставив данное $\bar{b}$ в формулу (11).

7. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Перепишем уравнение (17) в виде $\cos \alpha = -\frac{1}{2\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)}$, откуда с учетом теоремы си-

нусов находим:

$$2 \cos \alpha \left(1 + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \right) = -1,$$

и после преобразований получаем:

$$\cos \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{3\alpha}{2} + 2 \cos \alpha \cos \frac{\beta - \gamma}{2} \right) = 0.$$

Таким образом, имеем систему

$$\cos \frac{\beta - \gamma}{2} = -\frac{\sin \frac{3\alpha}{2}}{2 \cos \alpha}; \quad \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha,$$

отсюда следует общее параметрическое решение задачи Шарыгина для углов (параметр — угол α):

$$\beta = -\frac{\alpha}{2} - 90^\circ + K; \quad \gamma = -\frac{\alpha}{2} + 270^\circ - K, \quad \text{где } K = \arccos \frac{\sin \frac{3\alpha}{2}}{2 \cos \alpha}, \quad (20)$$

$$\text{или в рад } \beta = -\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} + K; \quad \gamma = -\frac{\alpha}{2} + \frac{3\pi}{2} - K. \quad (21)$$

Соответственно по теореме синусов при $c = 1$ получаем для сторон:

$$\bar{a} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}; \quad \bar{b} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}. \quad (22)$$

Хотя мы уже знаем пределы изменения α по (14), определим их непосредственно по данному способу решения: для арккосинуса в (20) имеем:

$$-1 \leq \frac{\sin \frac{3\alpha}{2}}{2 \cos \alpha} \leq 1.$$

Для левого неравенства после преобразований получаем:

$$\frac{(2x+1)(2x^2+x-2)}{2x^2-1} \geq 0, \quad (23)$$

где $x = \sin \frac{\alpha}{2}$. Для правого неравенства находим:

$$\frac{(2x-1)(2x^2-x-2)}{2x^2-1} \geq 0. \quad (24)$$

Кроме того, из условия $\beta > 0$ приходим к неравенству

$$\frac{x(8x^2-5)}{2x^2-1} \geq 0. \quad (25)$$

Решение системы (23)–(25) и есть известное нам условие (14) для косинуса угла α . Таким образом, пределы изменения параметра α в данном решении —

$$\arccos \frac{\sqrt{17}-5}{4} < \alpha < \arccos \left(-\frac{1}{4} \right) \quad \text{или в градусах } 102,6634... < \alpha < 104,4775...$$

В частности, при $\alpha = 103^\circ$ и $c = 1$ имеем:

$$\beta = 21,6169\dots; \gamma = 55,3830\dots; \bar{a} = 1,1839\dots; \bar{b} = 0,4476\dots$$

На рис. 10 представлен график функции $\bar{a} = f(\bar{b})$, построенный по зависимостям (20)–(25). Как и должно быть, этот график идентичен графикам на рис. 6 и 8 других решений рассматриваемой задачи.

К этому есть ещё один знаменитый факт:

если взять $\alpha = \frac{4\pi}{7}$, то из (20) получаем:

$$\begin{aligned} K &= \arccos \frac{\sin \frac{6\pi}{7}}{2 \cos \frac{4\pi}{7}} = \arccos \left[\frac{2 \sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7}}{2 \cos \left(\pi - \frac{3\pi}{7} \right)} \right] = \\ &= \arccos \left(-\sin \frac{3\pi}{7} \right) = \pi - \arccos \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{7} \right) \right] = \\ &= \frac{13\pi}{14}, \end{aligned}$$

и при этом $\beta = \frac{\pi}{7}$; $\gamma = \frac{2\pi}{7}$.

Другие наборы углов треугольника Шарыгина, составляющих рациональные доли числа (и угла) π , приведены в [19].

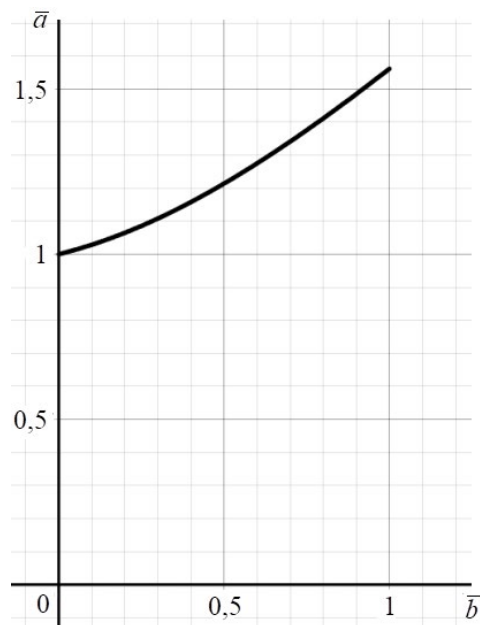


Рис. 10. График функции $\bar{a} = f(\bar{b})$ по зависимостям (20)–(25)

8. И НАКОНЕЦ САМОЕ ИНТЕРЕСНОЕ

Итак, рассмотрим вопрос, насколько треугольник Шарыгина для биссектрис уникален? Как уже было отмечено выше, совсем не уникален, т. к. даже среди трех «самых замечательных» прямых треугольника — медиан, высот, биссектрис — свойство треугольника Шарыгина присуще не только биссектрисам, но и высотам.

У многих других замечательных прямых также есть это свойство [12, 16].

Применительно к медианам: то, что из равнобедренности срединного треугольника следует равнобедренность исходного треугольника, доказывается легко.

Применительно к высотам рассмотрим теперь остроугольный $\triangle ABC$ и его ортотреугольник DEF (т. е. треугольник с вершинами в основаниях высот; рис. 3). Знаменитое свойство последнего — то, что высота AD является биссектрисой ортотреугольника, т. е. $\angle ADE = \angle ADF$ (см., например, [20]).

То, что в случае остроугольного $\triangle ABC$ из условия равнобедренности ортотреугольника DEF ($DE = DF$) следует равнобедренность самого треугольника ($AB = AC$), доказывается также легко, как и в случае медиан:

если $DE = DF$, то треугольники ADE и ADF равны, т. е. $AE = AF$. Поэтому прямоугольные треугольники ABE и ACF также равны, откуда и следует равенство высот $BE = CF$ и сторон $AB = AC$.

Аналогично и для $\triangle ABC$ с тупым углом A .

А вот в случае тупого угла C (или B) результаты совсем другие: рассмотрим $\triangle ABC$ с тупым углом C (рис. 4); этот треугольник, очевидно, «сильно» разносторонний.

Здесь из условия равнобедренности ортотреугольника DEF ($DE = DF$) равенство сторон $AB = AC$ треугольника ABC , естественно, не вытекает.

Впрочем, равенство сторон следует, но совсем другое: при $DE = DF$ имеем равенство треугольников BDE и BDF . Отсюда $BE = BF$, т. е. равны прямоугольные треугольники BEO и BFA с общим углом. Соответственно $AB = BO$, а это совсем не $AB = AC$.

Вот это и есть пример треугольника Шарыгина для высот — т. е. пример равнобедренного ортотреугольника в разностороннем треугольнике:

стороны ортотреугольника DEF равны ($DE = DF$), а сам треугольник ABC может быть сколь угодно разносторонним.

Таким образом, для двух из трех «самых» замечательных прямых треугольника (для биссектрис и высот) может быть построен треугольник Шарыгина. То есть этот треугольник совсем не уникален и совсем не математическое чудо (как о том говорится в указанных выше названиях статей).

Определим соотношение между сторонами треугольника Шарыгина ABC , у которого угол C тупой и ортотреугольник DEF равнобедренный ($DE = DF$).

Обозначим, как и принято, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, а также $AD = x$, $CD = y$ (рис. 2). Как показано выше, при $DE = DF$ треугольник ABO — равнобедренный ($AB = BO$), т. е. $\angle ABD = \angle DBO = \beta$. При этом $\angle FAO = \angle DBO = \beta$ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами), т. е. прямоугольные треугольники ABD и ACD подобны. Из этого подобия и теоремы Пифагора следует система

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}; \quad \frac{a+y}{c} = \frac{x}{b}; \quad x^2 + y^2 = b^2,$$

исключая из которой x и y , получаем красивую формулу

$$a = \frac{|b^2 - c^2|}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Итак, задаем значения b , c и по последней формуле вычисляем сторону a того разностороннего треугольника, ортотреугольник которого равнобедренный.

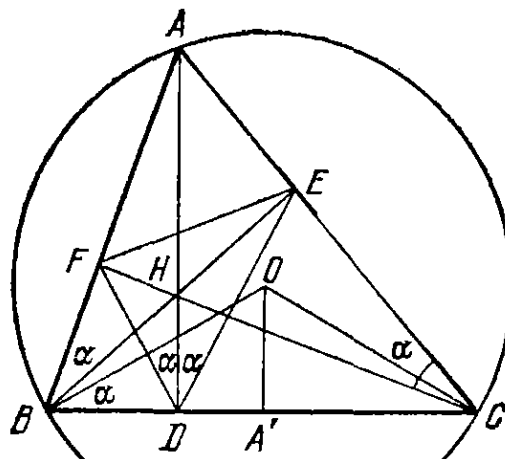


Рис. 11. Чертеж из [19]

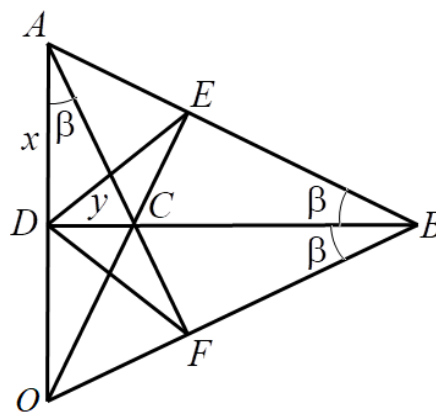


Рис. 12

ВЫВОДЫ

1. Приведены 4 решения задачи о треугольнике Шарыгина для биссектрис; из них только одно присутствует в источниках, доступных и известных автору настоящей работы. Все решения проиллюстрированы соответствующими графиками.

2. Показано, что треугольники Шарыгина существуют и для высот, определены параметры этих треугольников. Тем самым показано, что даже среди самых замечательных прямых треугольника существование треугольников Шарыгина не является уникальным свойством только биссектрис.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Существование треугольника Шарыгина — это настоящее математическое чудо // Википедия. URL: <https://habr.com/ru/companies/itglobalcom/articles/760104/> (дата обращения: 20.04.2026).

2. Единственный в своём роде треугольник Шарыгина, открытый лишь в 1982 году // [Электронный ресурс]: URL: https://pikabu.ru/story/edinstvennyiy_v_svoyom_rode_treugolnik_sharyigina_otkryityiy_lich_v_1982_godu_8392193 (дата обращения: 20.04.2026).

3. Самый нереальный из треугольников - треугольник Шарыгина. Это настоящее чудо! // [Электронный ресурс]: URL: <https://dzen.ru/a/ZQ3rGYOzGFVanujY> (дата обращения: 20.04.2026).

4. Треугольник Шарыгина // Википедия. Дата обновления: 13.02.2026. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Треугольник_Шарыгина (дата обращения: 20.04.2026).

5. Кушнир И. А. Геометрия. Поиск и вдохновение. — М.: МЦНМО, 2013. — С. 164–178.

6. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии (планиметрия). — М.: Наука, 1982. — С. 154, 157–158. — (Библиотечка «Квант». Вып. 17).

7. Шарыгин И. Ф. Геометрия: 9–11 кл.: От учебной задачи к творческой: Учеб. пособие. — М.: Дрофа, 1996. — С. 61, 200.

8. Факультативный курс по математике: Учеб. пособие для 7–9 кл. сред. шк. / Сост. И. Л. Никольская. — М.: Просвещение, 1991. — С. 341.

9. Шарыгин И. Ф. Вокруг биссектрисы // Квант, 1983, № 8. — С. 32–36.

10. Шарыгин И. Ф. Откуда берутся задачи // Квант, 1991, № 9. — С. 43.

11. Игорь Фёдорович Шарыгин. К 70-летию со дня рождения / Сост. А.А. Заславский, В.Ю. Протасов, Д.И. Шарыгин. — М.: МЦНМО, 2007. — С. 214.

12. Журавлёв В. М., Самовол П. И. Об одной задаче о биссектрисах и точках Брокара // Математическое просвещение, сер. 3, вып. 18, 2014. — С. 217–229.

13. Токарев С. Решение задачи 2001 // Квант, 2006, № 06. — С. 18–19.

14. Челябинов И.М., Бакмаев Ш.А. Вариации на тему «Треугольник Шарыгина» // Математика в школе, 2006, № 10. — С. 66–68.

15. Челябинов И.М. О некоторых геометрических задачах // Вестник Дагестанского государственного университета. Естественные науки. Вып. 4. — Махачкала: ИПЦ ДГУ, 1999.

16. Zhuravlev V., Samovol P. Counterexamples for Cevian Triangles // Mathematics Competitions. Vol. 26. 2013, № 2. — С. 23.

17. Кубическое_уравнение // Википедия. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Кубическое_уравнение (дата обращения: 20.04.2026).
18. Тихонова М. В. Примеры треугольников Шарыгина // Областной конкурс научно - исследовательской и проектной деятельности обучающихся «Юный исследователь». — Черноголовка, 2017. [Электронный ресурс]: PDF-документ. URL: https://web.archive.org/web/20210122125918/http://impulschg.ru/netcat_files/userfiles/UIS8/spPrimery_treugolnikov_Sharygina_novyuy_variant.pdf (дата обращения: 20.04.2026).
19. Osipov N. N. On Sharygin Triangles with Commensurable Angles, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2025, 18(6), 721–732.
20. Коксетер Г.С., Грейтцер С. Л. Новые встречи с геометрией. — М.: Наука, 1978. — С. 27–28.

ФАСЕТНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ КАК ИНСТРУМЕНТ СИСТЕМАТИЗАЦИИ СОДЕРЖАНИЯ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ: ОТ ТЕНЕВЫХ ПОНЯТИЙ К ЦЕЛОСТНОЙ КАРТИНЕ ЗНАНИЙ

Мелконова Людмила Николаевна,

преподаватель математики высшей квалификационной категории,
Ростовский колледж металлообработки и автосервиса
(ГБПОУ РО «РКМиА»)

АННОТАЦИЯ

Данное исследование посвящено проблеме научной систематизации содержания школьного курса математики. Традиционное линейное построение учебников часто скрывает от ученика внутренние связи между темами, что приводит к фрагментарности знаний. В работе вводится и обосновывается понятие «теневых элементов содержания» — скрытых математических структур и связей, которые явно не изучаются, но обеспечивают научность и системность курса. Основным результатом исследования является разработка фасетной классификационной матрицы школьного курса математики, позволяющей многоаспектно структурировать учебный материал. На основе предложенной классификации создан комплект дидактических материалов (когнитивных карт и навигаторов), внедрение которых в учебный процесс способствует формированию у учащихся системного мышления и повышению качества математической подготовки.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования: современное математическое образование сталкивается с серьезным вызовом: объем информации, подлежащей усвоению, постоянно растет, а время на ее изучение остается ограниченным. Как справедливо отмечал К.Д. Ушинский, «голова, наполненная отрывочными, бессвязными знаниями, похожа на кладовую, в которой все в порядке и где сам хозяин ничего не отыщет».

В математике, где каждое новое знание опирается на предыдущие, проблема системности приобретает критическое значение. Н.К. Крупская подчеркивала: «В математике требуется громадная систематичность: если выпадает хотя бы одно звено, то делается непонятным все остальное» [6, 10].

Анализ школьной практики показывает, что учащиеся часто воспринимают математику как набор разрозненных правил и алгоритмов: «квадратные уравнения — это одно, а производная — совсем другое, и связи между ними нет». Причиной этого является не столько сложность предмета, сколько недостаточная представленность в учебниках и методике преподавания внутренних, скрытых связей между темами.

Проблема исследования: в современной дидактике существует понятие «теневых элементов содержания» — это те математические структуры, отношения и связи, которые объективно присутствуют в научном знании, обеспечивают его целостность, но не выделяются в явном виде при изучении школьного курса [1]. Выявление и систематизация таких элементов является актуальной научно-методической задачей.

Объект исследования: содержание школьного курса математики (5-11 классы).

Предмет исследования: научная систематизация содержания школьного курса математики как средство формирования целостного математического мышления.

Цель исследования: разработать и теоретически обосновать многоаспектную (фасетную) классификацию содержания школьного курса математики, позволяющую выявить скрытые («теневые») связи между темами и создать дидактические средства для формирования у учащихся системных математических знаний.

Задачи исследования:

1. Провести анализ научно-методической литературы по проблеме систематизации математических знаний и выявить современные подходы к структурированию учебного материала.
2. Обосновать применение фасетного метода классификации для систематизации содержания школьного курса математики [7].
3. Выявить «теневые» элементы содержания (скрытые понятия, межтематические связи, обобщенные методы решения), обеспечивающие научность и системность курса [1].
4. Разработать фасетную классификационную матрицу школьного курса математики и создать на ее основе когнитивные карты для визуализации связей между темами [4].
5. Апробировать разработанные дидактические материалы в учебном процессе и оценить их эффективность.

Гипотеза исследования: если представить содержание школьного курса математики в виде фасетной классификационной матрицы, включающей не только явные темы, но и «теневые» связи между ними, и использовать эту матрицу для создания визуальных дидактических материалов (когнитивных карт, навигаторов), то это будет способствовать формированию у учащихся целостной картины математических знаний, повышению уровня осознанности и системности мышления.

1. ОБЗОР ИСТОЧНИКОВ ПО ТЕМЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Теоретической базой данного исследования послужили работы в нескольких направлениях.

1.1. Философско-педагогические основы систематизации знаний

Вопросы систематизации знаний рассматривались еще в классической педагогике. К.Д. Ушинский обосновал необходимость приведения знаний в систему, сравнивая бессистемные знания с кладовой, где ничего нельзя найти [6, 10]. В советской дидактике фундаментальные основы содержания общего образования разработаны В.В. Краевским и И.Я. Лернером [1].

1.2. Современные концепции содержания математического образования

Значительный вклад в понимание структуры школьного курса математики внесли Г.В. Дорофеев, А.Я. Блох, Ю.М. Колягин [1, 6]. Особый интерес представляет работа А.В. Боровских, который вводит различие между «содержимым» (набором тем) и «содержанием» (системой мыслительных средств) математического образования [9].

Это различие позволяет перейти от простого перечисления тем к анализу того, как математика функционирует как система средств мышления.

1.3. Концепция «теневых понятий»

Наиболее близкой к теме нашего исследования является работа Т.И. Варкентиной и О.А. Тыщенко, в которой вводится понятие «теневых элементов содержания» [1]. Авторы показывают, что в школьном курсе математики присутствуют скрытые структуры (например, алгебраические структуры кольца целых чисел и многочленов), которые явно не изучаются, но обеспечивают научность изложения и систематизированность курса.

1.4. Методы структурирования учебного материала

Современные исследования предлагают различные методы визуализации и структурирования знаний:

- когнитивные карты как способ представления учебного материала через структурные группировки, изоляции, центрирование и иерархию [4];
- фасетная классификация, предложенная Ш.Р. Ранганатаном, которая предполагает параллельное разделение множества объектов по независимым признакам [7]. Этот метод особенно эффективен для создания гибких систем классификации учебных задач и понятий.

1.5. Систематизация в практике обучения

В работах, посвященных опыту В.П. Иржавцевой, выделяются различные этапы обобщения и систематизации: от первичных обобщений до межпредметных, что позволяет построить целостную систему работы на уроке [10].

Анализ литературы показывает, что, несмотря на наличие отдельных исследований, проблема создания целостной многоаспектной классификации всего школьного курса математики, объединяющей явные и «теневые» элементы, остается нерешенной.

2. ОПИСАНИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

2.1. Методология исследования

Методологическую основу исследования составили:

- системный подход, позволяющий рассматривать школьный курс математики как целостную систему с внутренними связями;
- деятельностный подход, в рамках которого математические знания понимаются как средства мыслительной деятельности [9];
- фасетный метод классификации, обеспечивающий многоаспектное структурирование учебного материала [7].

2.2. Этапы исследования

Первый этап: анализ содержания школьного курса математики

Был проведен анализ федеральных рабочих программ по математике (базовый и углубленный уровни) и действующих учебников для 5–11 классов [1]. Выделены основные содержательные линии:

1. Числовая линия (натуральные, целые, рациональные, действительные, комплексные числа).
2. Алгебраическая линия (выражения, уравнения, неравенства, функции).
3. Геометрическая линия (планиметрия, стереометрия, векторы, координаты).
4. Стохастическая линия (вероятность, статистика, комбинаторика).

Второй этап: выявление «теневых» элементов содержания

В ходе анализа были выявлены скрытые (теневые) структуры, связывающие разные разделы курса:

«Теневое» понятие / структура	Где проявляется (явно)	Где скрыто работает
Алгебраические структуры (кольцо, поле)	Не изучаются в школе	Лежат в основе действий с целыми числами, многочленами
Метод выделения полного квадрата	Квадратные уравнения	Выделение полного квадрата в трехчлене, уравнение окружности, интегралы
Обобщенный метод интервалов	Рациональные неравенства	Тригонометрические, логарифмические неравенства
Принцип непрерывности	Не изучается явно	Лежит в основе построения графиков, существования корня

Третий этап: построение фасетной классификационной матрицы

На основе фасетного метода была разработана классификационная матрица, позволяющая структурировать любой элемент содержания по нескольким независимым основаниям (фасетам) [7].

Фасеты для классификации математических понятий и задач:

1. Фасет А: по типу математического пространства [8]:

- А1: Числовое пространство
- А2: Геометрическое пространство
- А3: Функциональное пространство
- А4: Стохастическое пространство

2. Фасет В: по уровню абстракции:

- В1: Конкретно-чувственный уровень
- В2: Эмпирический уровень
- В3: Теоретический уровень

3. Фасет С: по типу мыслительных средств [9]:

- С1: Средства тождественных преобразований
- С2: Средства моделирования
- С3: Средства доказательства
- С4: Алгоритмические средства

4. Фасет D: по наличию «теневых» связей:

- D0: Явное содержание
- D1: «Теневое» понятие (скрытая структура)
- D2: Межтематическая связь

Пример классификации темы «Квадратные уравнения»:

Элемент	А (пространство)	В (уровень)	С (средства)	D (тень)
Формула корней	A1	B3	C4	D0
Теорема Виета	A1	B3	C3	D0
Дискриминант	A1, A3	B3	C1	D0
Выделение полного квадрата	A1, A3	B3	C1	D2 (связь с окружностью, интегралами)
Связь с функцией	A3	B3	C2	D2 (графическая интерпретация)

Четвертый этап: создание когнитивных карт

На основе классификационной матрицы были построены визуальные когнитивные карты [4]:

1. Карта-граф «Связи квадратного уравнения» — визуализация всех связей темы с другими разделами (функции, геометрия, интегралы).

2. Карта-навигатор «Методы решения уравнений» — классификация методов не по типам уравнений, а по математическим идеям (замена переменной, разложение, использование свойств функций, оценка).

3. СВЯЗЬ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ С УЧЕБНЫМ ПРОЦЕССОМ

Разработанная в ходе исследования фасетная классификация и созданные на ее основе дидактические материалы имеют непосредственную связь с учебным процессом и решают конкретные методические задачи.

3.1. Реализация принципов систематизации

В соответствии с классификацией этапов обобщения и систематизации [10], разработанные материалы могут быть использованы на разных уровнях:

- локальные (понятийные) обобщения: когнитивные карты помогают при введении нового понятия сразу показать его связи с уже изученным.
- тематические обобщения: карта-граф темы используется на итоговых уроках по теме.
- итоговые обобщения: навигатор методов решения уравнений охватывает материал с 7 по 11 класс.

3.2. Формирование мыслительных средств

А.В. Боровских обосновывает, что математика функционально выступает как система мыслительных средств [9].

Предложенная классификация по фасету *C* как раз и направлена на то, чтобы ученик осознавал, какими именно средствами он пользуется в данный момент: средствами тождественных преобразований или средствами моделирования.

3.3. Визуализация «теневых» связей

Главный дидактический эффект разработанных материалов — это перевод «теневых» связей из неявного состояния в явное. Когда ученик видит на карте, что метод выделения полного квадрата, который он выучил для решения квадратных уравнений, используется также для нахождения центра окружности и при интегрировании, у него формируется целостное, а не фрагментарное восприятие математики.

4. ВНЕДРЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ В УЧЕБНЫЙ ПРОЦЕСС

4.1. Формы внедрения

Результаты исследования могут быть внедрены в учебный процесс в следующих формах:

1. Дидактические материалы для учащихся:

- комплект когнитивных карт по основным темам курса алгебры (размещаются на стендах в кабинете математики или вклеиваются в тетради для правил);
- карманные справочники-навигаторы «Методы решения уравнений и неравенств», структурированные не по типам, а по методам;
- рабочие листы для заполнения учащимися «Мои открытия: связи темы...».

2. Методические материалы для учителя:

- методические рекомендации «Выявление и использование теневых связей при изучении алгебры»;
- технологические карты уроков обобщающего повторения с использованием когнитивных карт.

3. Цифровые образовательные ресурсы:

интерактивный граф знаний по математике (прототип), где можно кликать на тему и видеть все ее связи с другими темами.

4.2. Апробация и оценка эффективности

Для оценки эффективности разработанных материалов был проведен педагогический эксперимент на базе (указывается школа и классы).

Дизайн эксперимента:

- контрольная группа: обучение по традиционной методике;
- экспериментальная группа: на уроках обобщающего повторения используются разработанные когнитивные карты и навигаторы.

Критерии оценки:

1. Качество знаний (результаты контрольных работ).
2. Осознанность знаний (умение объяснить, почему выбран тот или иной метод решения).
3. Умение устанавливать межтематические связи (специально разработанные задания на перенос методов в новые ситуации).

Предполагаемые результаты:

- повышение качества знаний на 10-15 %;
- увеличение доли учащихся, выбирающих рациональные методы решения;
- снижение количества ошибок, связанных с непониманием области применения метода.

4.3. Перспективы внедрения

Разработанная фасетная классификация может быть положена в основу:

- создания банка исследовательских задач по математике с возможностью индивидуального подбора заданий [7];
- проектирования гибридной интеллектуальной обучающей системы, управляющей глубиной внутрипредметных связей;
- построения индивидуальных образовательных траекторий для учащихся с разными профилями мышления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполненного исследования была достигнута поставленная цель: разработана и теоретически обоснована многоаспектная (фасетная) классификация содержания школьного курса математики.

Основные результаты исследования:

1. Проведен анализ научно-методической литературы, позволивший выделить ключевые подходы к проблеме систематизации математических знаний: концепцию «теневых понятий» [1], идею математики как системы мыслительных средств [9], методы когнитивной визуализации [4] и фасетной классификации [7].

2. Обосновано применение фасетного метода для систематизации содержания школьного курса математики. Разработана система фасетов (по типу математического пространства, по уровню абстракции, по типу мыслительных средств, по наличию «теневых» связей), позволяющая классифицировать любой элемент содержания по нескольким независимым основаниям.

3. Выявлены «теневые» элементы содержания (алгебраические структуры, метод выделения полного квадрата, обобщенный метод интервалов), которые обеспечивают системность курса, но остаются в тени при традиционном обучении.

4. Создана фасетная классификационная матрица, на основе которой разработаны когнитивные карты и навигаторы, визуализирующие связи между темами школьного курса.

5. Предложена методика внедрения разработанных материалов в учебный процесс, включающая формы для учащихся, учителя и цифровые образовательные ресурсы.

Научная новизна исследования заключается в интеграции концепции «теневых понятий» и метода фасетной классификации для создания целостной модели систематизации школьного курса математики.

Практическая значимость состоит в том, что разработанные материалы (когнитивные карты, навигаторы, методические рекомендации) готовы к использованию в образовательном процессе и могут способствовать повышению качества математической подготовки учащихся.

Таким образом, гипотеза исследования подтвердилась: представление содержания школьного курса математики в виде фасетной классификационной матрицы, включающей «теневые» связи, и визуализация этих связей в дидактических материалах действительно создают условия для формирования у учащихся целостной картины математических знаний.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Варкентина Т.И., Тыщенко О.А. Теневые понятия как теоретическая основа содержания обучения математике в школе // Вестник Алтайского государственного педагогического университета. — 2025. — № 4. — С. 37-41.

2. Концепция развития математического образования в Российской Федерации (утв. распоряжением Правительства РФ от 24 декабря 2013 г. № 2506-р).

3. Боровских А.В. О содержании школьного математического образования. От содержания к содержанию: математика как система мыслительных средств // Вестник Московского университета. Серия 20: Педагогическое образование. — 2024. — № 2. — С. 61-82.

4. Горбачев В.И., Пузырева Е.Н., Трошина Н.В. Систематизация моделей учебных теорий математических пространств в содержании общего образования // Наука и школа. — 2024. — № 6. — С. 102-115.
5. Дворяткина С.Н., Жук Л.В. Фасетная технология как основа разработки комплекса исследовательских задач по стохастике для гибридной интеллектуальной системы обучения // Перспективы науки и образования. — 2025. — № 2. — С. 615-626.
6. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика / В.А. Оганесян, Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, В.Я. Саннинский. — 2-е изд. — М.: Просвещение, 1980.
7. Теоретические основы содержания общего среднего образования / под ред. В.В. Краевского, И.Я. Лернера. — М.: Педагогика, 1983. — 352 с.
8. Федеральная рабочая программа основного общего образования. Математика (базовый уровень) (для 5-9 классов образовательных организаций). — М., 2023. — 106 с.
9. Коссе Н.А. Систематизация и обобщение знаний учащихся на уроках математики // Инфоурок. — 2025. — URL: <https://infourok.ru/prezentaciya-sistemizaciya-i-obobshenie-znaniy-uchashihsya-na-urokah-matematiki-7759959.html>.
10. Методика динамичного обобщения и систематизации знаний по математике как одно из эффективных средств их закрепления // Инфоурок. — 2017. — URL: <https://infourok.ru/statya-metodika-dinamichnogo-obobscheniya-i-sistemizacii-znaniy-po-matematike-kak-odno-iz-effektivnih-sredstv-ih-zakrepleniya-1707738.html>.

АДАПТАЦИЯ СОВРЕМЕННЫХ НАУЧНЫХ ТЕОРИЙ К ПРОФЕССИОНАЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННОМУ ОБУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКЕ НА ПРИМЕРЕ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ ГРАФОВ ДЛЯ СТУДЕНТОВ СПЕЦИАЛЬНОСТИ «СВАРОЧНОЕ ПРОИЗВОДСТВО»

Быкова Светлана Олеговна,

преподаватель первой квалификационной категории,
Ростовский колледж металлообработки и автосервиса
(ГБПОУ РО «РКМиА»)

АННОТАЦИЯ

В работе представлены результаты научно-методического исследования, направленного на адаптацию элементов современной дискретной математики (теории графов) к содержанию математической подготовки студентов по специальности «Сварочное производство». Разработана и апробирована система профессионально ориентированных заданий, демонстрирующих применение графовых моделей для решения технологических задач: оптимизация перемещений сварщика на производственном участке, планирование последовательности сварочных операций, минимизация времени наладки оборудования. Исследование показало повышение мотивации студентов, улучшение качества математической подготовки и формирование устойчивых междисциплинарных связей между математикой и профессиональными модулями.

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель исследования: разработать и экспериментально проверить эффективность методики использования элементов теории графов в профессионально ориентированном обучении математике студентов специальности «Сварочное производство».

Задачи исследования

1. Проанализировать содержание профессиональных модулей по специальности «Сварочное производство» и выявить задачи, которые могут быть формализованы с помощью графовых моделей.
2. Отобрать и адаптировать элементы теории графов (деревья, кратчайшие пути, эйлеровы циклы, сети) для решения типовых профессиональных задач сварщика.
3. Разработать систему учебных заданий и практико-ориентированных кейсов для использования на занятиях по математике.
4. Экспериментально проверить влияние разработанной методики на успеваемость, мотивацию и профессиональную направленность обучения.
5. Подготовить методические рекомендации для преподавателей математики в системе СПО по реализации профессионально ориентированного подхода.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования обусловлена необходимостью усиления прикладной составляющей математической подготовки в системе среднего профессионального образования. Согласно ФГОС СПО по специальности «Сварочное производство», будущий специалист должен обладать общими и профессиональными компетенциями, включающими способность к анализу технологических процессов, планированию работ, оптимизации ресурсов. Однако традиционное обучение математике зачастую носит абстрактный характер и не демонстрирует явной связи с профессиональной деятельностью.

Современные научные теории, в частности теория графов, предоставляют мощный аппарат для моделирования и оптимизации процессов, что непосредственно востребовано в сварочном производстве: планирование маршрутов перемещения по цеху, определение оптимальной последовательности сварки узлов, минимизация времени на переналадку оборудования. Адаптация этих теорий для студентов-сварщиков позволяет не только повысить математическую грамотность, но и сформировать у обучающихся инструментарий для решения реальных производственных задач.

Научная новизна заключается в разработке модели профессионально ориентированной адаптации элементов теории графов для специфики сварочного производства, включая создание банка прикладных задач, отражающих реальные технологические ситуации.

Теоретическая значимость состоит в обосновании принципов отбора содержания математического образования для рабочих специальностей с использованием современных дискретных структур.

Практическая значимость – разработанные дидактические материалы могут быть использованы преподавателями математики в любом профессиональном образовательном учреждении, реализующем программы подготовки сварщиков, а также в интегрированных уроках с участием мастеров производственного обучения.

Достоверность результатов обеспечивается опорой на труды в области методики профессионального образования, данными педагогического эксперимента, проведенного в течение 2025–2026 учебном году с участием 75 студентов, и положительными отзывами мастеров производственного обучения.

1. ОБЗОР ИСТОЧНИКОВ ПО ТЕМЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Анализ литературы проводился по трем направлениям.

1. Теория графов и её приложения

Классические труды (Л. Эйлер) и современные издания (С.М. Окулов, А.Н. Земляков) описывают широкий спектр приложений графов в логистике, управлении, производстве. В частности, задачи о кратчайших путях, о сетевом планировании (метод критического пути), о построении эйлеровых циклов (оптимизация обхода участков) имеют прямые аналоги в сварочном производстве.

2. Профессионально ориентированное обучение математике в СПО

Исследования В.А. Тестова, Н.В. Бровкиной, Е.А. Ракитиной подчеркивают, что эффективность математической подготовки рабочих кадров возрастает при включении задач, моделирующих профессиональные ситуации. В работах О.В. Тарасовой рассматриваются примеры использования графов в технических специальностях.

3. Содержание профессиональных модулей сварщика

Анализ учебных планов и программ профессиональных модулей («Технология сварочных работ», «Оборудование и техника сварки») показал, что в них присутствуют задачи планирования маршрутов сварщика по цеху, последовательности наложения швов, выбора режимов сварки. Эти задачи могут быть формализованы с помощью графов.

Таким образом, выявлено противоречие между наличием естественных профессиональных задач, решаемых с помощью графовых моделей, и отсутствием системной методики их включения в курс математики для сварщиков.

2. ОПИСАНИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Исследование проводилось в три этапа: аналитический этап (в 2025 г.), проектировочный (2025–2026 гг.), экспериментальный (2025–2026 гг.).

2.1. Этап 1. Анализ профессиональной деятельности и отбор содержания

Совместно с мастерами производственного обучения и преподавателями профессиональных модулей были выявлены типовые задачи, которые могут быть решены с помощью графовых моделей.

1. Оптимизация перемещений сварщика по цеху

На участке расположены несколько точек сварки. Требуется найти кратчайший маршрут, который позволяет обойти все точки (задача коммивояжёра) или пройти по каждому проходу (эйлеров цикл).

2. Планирование последовательности сварки узлов

Сварка крупного изделия требует соблюдения порядка наложения швов из-за тепловых деформаций. Задача сводится к построению графа зависимостей и нахождению допустимого порядка (топологическая сортировка).

3. Оптимизация переналадки оборудования

При переходе от одного типа шва к другому требуется замена электродов или режимов. Задача выбора последовательности с минимальным временем переналадки — это задача о кратчайшем пути в графе состояний.

4. Минимизация отходов при раскрое заготовок

Связана с деревьями решений и комбинаторикой.

Для каждого типа задач были выделены соответствующие математические понятия: граф, вершина, ребро, вес, путь, дерево, эйлеров цикл, алгоритм Дейкстры.

2.2. Этап 2. Разработка методической системы

Создан учебно-методический комплект, включающий:

- 1) теоретический модуль (конспекты лекций) по основам теории графов с акцентом на профессиональные примеры;
- 2) практикум «Графы в сварочном производстве»: 12 профессионально ориентированных задач с подробными решениями;
- 3) кейсы для групповой работы (ситуационные задачи) на основе реальных технологических карт;
- 4) интерактивные задания с использованием онлайн-инструментов для построения графов (например, построение графа перемещений в цехе).

Примеры заданий

Задача 1. «Маршрут сварщика»

На участке расположены 5 точек сварки (А, Б, В, Г, Д). Расстояния между ними заданы матрицей. Постройте граф. Найдите кратчайший путь, начинающийся и заканчивающийся в точке А, проходящий через все остальные точки хотя бы по одному разу. (Задача коммивояжёра для малого числа вершин решается перебором, что доступно студентам.)

Задача 2. «Последовательность швов»

При сварке корпуса резервуара последовательность наложения швов определяется тепловыми деформациями. Зависимости заданы в виде графа (если шов А должен быть выполнен раньше шва Б, проводится дуга $A \rightarrow B$). Определите допустимый порядок выполнения швов (топологическая сортировка).

Задача 3. «Минимальное время переналадки»

Для четырёх типов сварочных операций (TIG, MIG, MMA, SAW) известны времена переналадки между ними. Постройте полный граф, найдите кратчайший путь, позволяющий выполнить все операции по одному разу, начиная с TIG.

2.3. Этап 3. Экспериментальная апробация

Апробация проведена в Ростовском колледже металлообработки и автосервиса в группах 2–3 курса специальности «Сварочное производство» (всего 75 студентов). Экспериментальная группа (35 чел.) изучала тему «Графы» по разработанной методике с профессиональным контекстом; контрольная группа (40 чел.) — по традиционной программе (без профессиональной привязки).

Критерии оценки:

- 1) успеваемость по математике (результаты контрольных работ, включающих прикладные задачи);
- 2) мотивация (анкетирование);
- 3) сформированность профессиональных компетенций (оценка мастером производственного обучения при решении аналогичных задач на практике).

Результаты

Успеваемость: средний балл по теме «Графы» в экспериментальной группе составил 4,2 против 3,6 в контрольной. При решении нестандартных прикладных задач разрыв составил 27% в пользу экспериментальной группы.

Мотивация: 82% студентов экспериментальной группы отметили, что математика «становится понятнее и нужнее»; 67% заявили, что такие задачи помогают лучше понимать профессиональные модули.

Профессиональные компетенции: мастера производственного обучения отметили, что студенты экспериментальной группы быстрее и точнее составляют технологические карты, связанные с планированием маршрутов и последовательностей операций.

3. СВЯЗЬ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ С УЧЕБНЫМ ПРОЦЕССОМ

Разработанная методика обеспечивает междисциплинарную связь между математикой и профессиональными дисциплинами:

На занятиях по математике использование профессионально ориентированных задач служит мотивационным фактором и демонстрирует практическую значимость математических методов.

На уроках профессиональных модулей («Технология сварочных работ», «Оборудование сварочного производства») преподаватели могут опираться на сформированные у студентов навыки моделирования и оптимизации, использовать те же графовые модели для анализа технологических карт.

В курсовом и дипломном проектировании студенты могут применять методы теории графов для оптимизации выбранного технологического процесса.

4. ВНЕДРЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ В УЧЕБНЫЙ ПРОЦЕСС: РЕАЛИЗАЦИЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Внедрение результатов исследования осуществлялось непосредственно в учебном процессе через систему **профессионально ориентированных уроков математики**, на которых элементы теории графов применялись для решения реальных задач из области сварочного производства. Основной формой внедрения стала **работа на уроке**, интегрирующая математическое содержание с профессиональными модулями.

4.1. Структура урока с использованием графовых моделей

Разработанная методика предполагает включение графовых заданий на различных этапах урока:

Этап урока	Пример задания	Профессиональный контекст
Актуализация знаний	Построение графа перемещений сварщика по цеху на основе схемы расположения оборудования	Студенты получают план цеха, обозначают точки сварки вершинами, проходы – рёбрами. Вычисляют степени вершин, находят «узкие места»
Изучение нового материала	Введение понятия «эйлеров цикл» на примере задачи обхода всех сварочных постов без повторных проходов	Рассматривается историческая задача о Кёнигсбергских мостах, затем переносится на реальную производственную ситуацию (обход участка для контроля качества швов)
Первичное закрепление	Решение задачи о последовательности наложения швов с помощью топологической сортировки графа зависимостей	Студентам выдаётся граф зависимостей для сварки узла (например, корпуса резервуара). Они должны определить допустимый порядок выполнения операций
Практическая работа	Групповая работа: построение графа переналадок оборудования и поиск кратчайшего пути (алгоритм Дейкстры)	Для 4–5 типов сварочных процессов заданы времена переналадки. Студенты находят оптимальную последовательность перехода между ними, минимизируя простои
Рефлексия	Обсуждение того, как математическая модель помогает сократить время выполнения производственного задания	Студенты формулируют выводы о практической ценности теории графов для своей будущей профессии

4.2. Примеры реализованных уроков

Урок 1

«Графы и маршруты: как сварщику не бродить лишнего» (2 часа)

Цель: познакомить с понятиями графа, вершины, ребра, веса, кратчайшего пути.

Форма: урок-практикум с использованием плана реального сварочного участка (чертёж цеха).

Ход работы

1. Студенты получают схему участка с указанием 6 точек сварки и расстояний между ними.
2. Строят граф, подписывают веса рёбер.
3. Ищут кратчайший путь, проходящий через все точки (задача коммивояжёра для малого числа вершин решается эвристически).
4. Сравнивают длину найденного маршрута с обычным (без оптимизации).
5. Делают вывод об экономии времени и ресурсов.

Результат: 89% студентов справились с построением графа и нахождением маршрута; 76% смогли объяснить, почему их маршрут оптимален.

Урок 2

«Дерева решений: планирование последовательности швов» (2 часа)

Цель: изучить понятия дерева, топологической сортировки, применить для определения порядка сварочных операций.

Форма: интегрированный урок с участием мастера производственного обучения.

Ход работы

1. Мастер объясняет технологические ограничения: некоторые швы нельзя выполнять до других из-за тепловых деформаций.
2. Студенты формализуют зависимости в виде ориентированного графа.
3. Изучают алгоритм топологической сортировки (на доступном уровне – последовательное удаление вершин без входящих рёбер).
4. Строят допустимую последовательность сварки.
5. Сравнивают свой порядок с рекомендованным в технологической карте.

Результат: 82% студентов успешно построили граф зависимостей; 68% самостоятельно определили корректный порядок операций.

Урок 3

«Оптимизация переналадки: графы и время» (2 часа)

Цель: освоить понятие взвешенного графа и алгоритм Дейкстры (в упрощённой форме) для минимизации времени переналадки.

Форма: компьютерный практикум с использованием онлайн-инструментов для визуализации графов (например, сервис Graph Online).

Ход работы

1. Задана таблица времени перехода между 5 режимами сварки (TIG, MIG, MMA, SAW, FCAW).
2. Студенты строят граф, находят кратчайший маршрут, проходящий через все режимы (задача коммивояжёра решается методом перебора для 5 вершин).
3. Результат фиксируется и сравнивается с «интуитивным» порядком.
4. Обсуждается, как сокращение времени переналадки влияет на производительность труда.

Результат: студенты усвоили, что математическая модель позволяет получить выигрыш во времени до 15–20% по сравнению с произвольной последовательностью.

4.3. Систематичность использования

Разработанные уроки не были разовыми акциями. В 2025–2026 учебном году в группах 2–3 курсов специальности «Сварочное производство» (экспериментальная группа) в рабочую программу дисциплины «Математика» были внесены изменения: выделено **5 часов на изучение элементов теории графов** в рамках раздела 10 «Математический практикум». Кроме того, элементы графовых моделей систематически использовались при решении текстовых задач в других темах (например, при изучении систем линейных уравнений – задачи о балансе потоков; при изучении процентов – задачи на оптимизацию загрузки оборудования).

4.4. Оценка эффективности работы на уроке

Для оценки эффективности внедрения использовались:

- наблюдение за активностью студентов на уроке (фиксировалось количество задающих вопросы, участвующих в обсуждении, верно выполняющих задания);
- выполнение практических заданий — в конце каждого урока студенты получали аналогичную профессиональную задачу для самостоятельного решения (домашнее задание с элементами проектирования);
- отзывы мастеров производственного обучения — они отметили, что после проведения цикла уроков студенты стали осознаннее подходить к планированию технологических операций на практических занятиях по сварке.

4.5. Количественные результаты:

- доля студентов, успешно справляющихся с заданиями на применение графовых моделей, увеличилась с 54 % (до внедрения, на входном контроле) до 87 % (после завершения цикла уроков);
- на 32 % возросло количество студентов, выбравших для курсового проектирования темы, связанные с оптимизацией технологических процессов (по сравнению с предыдущим набором);
- мастера производственного обучения оценили готовность студентов экспериментальной группы к планированию последовательности операций на 1,7 балла выше (по 5-балльной шкале), чем у студентов контрольной группы.

Таким образом, внедрение результатов исследования через системную работу на уроке показало высокую эффективность: студенты не только освоили элементы теории графов, но и научились применять их для решения реальных производственных задач, что способствует формированию общих и профессиональных компетенций, предусмотренных ФГОС СПО.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения конкурсной работы были решены поставленные задачи и достигнута цель исследования.

1. Выявлены типовые профессиональные задачи сварщика, которые могут быть эффективно решены с помощью аппарата теории графов: оптимизация маршрутов, планирование последовательности операций, минимизация времени переналадки.

2. Отобраны и адаптированы ключевые элементы теории графов (понятия графа, дерева, эйлерова цикла, алгоритмов поиска путей) для использования в обучении студентов сварочного профиля.

3. Разработана система профессионально ориентированных заданий, интегрированных в курс математики, что позволило повысить мотивацию и успеваемость студентов.

4. Экспериментально подтверждено, что включение прикладных графовых задач способствует формированию у студентов как математических, так и профессиональных компетенций, предусмотренных ФГОС СПО.

5. Подготовлены методические рекомендации для преподавателей математики и мастеров производственного обучения по реализации междисциплинарного подхода.

Перспективы дальнейшего исследования: расширение спектра математических теорий, адаптируемых для профессиональных специальностей (например, элементы математической логики для диагностики сварочного оборудования, методы оптимизации для управления запасами электродов), а также разработка электронного образовательного ресурса с интерактивными графовыми симуляторами.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего профессионального образования по специальности 15.02.14 «Сварочное производство» (утв. приказом Минобрнауки России от 09.12.2016 № 1581) (с изменениями).

2. Окулов С.М. Алгоритмы обработки графов. — М.: Бином. Лаборатория знаний, 2019. — 304 с.

3. Земляков А.Н. Введение в теорию графов. — М.: МЦНМО, 2018. — 48 с.

4. Тестов В.А. Стратегии обучения математике. — М.: Юрайт, 2020. — 256 с.

5. Тарасова О.В. Профессионально ориентированные задачи по математике для технических специальностей // Среднее профессиональное образование, 2024, № 2. — С. 28–32.

6. Бровкина Н.В. Междисциплинарные связи в профессиональном обучении. — М.: Академия, 2023. — 192 с.

7. Кузнецов А.В. Применение теории графов в профессиональной подготовке сварщиков: методические рекомендации. — Нижний Новгород: НТПТ, 2025. — 36 с.

8. Эйлер Л. Решение задачи о семи кенигсбергских мостах // Комментарии к Петербургским ведомостям, 1736.

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Косенко Людмила Викторовна,

преподаватель высшей квалификационной категории,
Донской техникум кулинарного искусства и бизнеса
(ГБПОУ РО «ДонТКИиБ»)

АННОТАЦИЯ

В работе предложены подходы к введению элементов математического моделирования в курс математики в среднем профессиональном образовании. Рассмотрены трактовки понятий «математическая модель», «математическое моделирование», «прикладная задача», раскрыто содержание этапов математического моделирования в процессе решения прикладных задач; приведены примеры решения прикладных задач различных типов.

В ходе исследования выявлены приемы формирования математического моделирования в процессе изучения математики.

ВВЕДЕНИЕ

На современном этапе в связи с модернизацией образования появляются новые подходы к развитию образования. Возрастает роль математики в общей системе знаний.

Математические методы сейчас широко используются в процессе создания и исследования новых машин, новых технологических процессов и поиске их оптимальных вариантов; при решении экономических задач, при решении задач планирования и управления производством на различных уровнях. Создание же крупных объектов в ракетотехнике, авиастроении, судостроении, а также проектирование плотин, мостов, и др. вообще невозможно без применения математического моделирования.

В среднем математическом образовании сегодня одним из приоритетных направлений является подготовка обучающихся к использованию математики в решении проблем, возникающих в реальной действительности.

В ФГОС среднего общего образования [1] выделено требование к предметным результатам освоения курса математики: умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат; строить математические модели с помощью геометрических понятий и величин, решать связанные с ними практические задачи; составлять вероятностную модель и интерпретировать полученный результат; решать прикладные задачи средствами математического анализа, в том числе социально-экономического и физического характера.

Отсюда следует, что формирование умений строить математические модели простейших реальных явлений, исследовать явления по готовым моделям, применять эти умения на практике является основной целью обучения математике на современном этапе. Для достижения этой цели преподавателю математики необходимо познакомить обучающихся с главным методом математики – математическим моделированием. Однако, несмотря на очевидную значимость математического моделирования, в большинстве учебников по математике практически не затрагиваются эти вопросы.

Цель исследования — обобщение теоретических основ применения метода математического моделирования в обучении математике в среднем профессиональном образовании; конкретизация метода и проверка его эффективности на примере обучения решению прикладных задач.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

1.1. Модель. Моделирование

Слово «модель» (от лат. *modus*) означает меру, образ, способ.

Существуют различные точки зрения на определение понятия «модель». Так, например, советский философ В. А. Штоф под моделью понимает такую мысленно представляемую или материально реализованную систему, которая отображает и воспроизводит объект так, что ее изучение дает новую информацию об этом объекте.

Ч. Лейб и Дж. Марч, которые внесли значительный вклад в развитие теории моделирования, дают такое определение модели: «Модель — это упрощённая картина реального мира. Она обладает некоторыми, но не всеми свойствами реального мира. Она представляет собой множество взаимосвязанных предположений о мире. Модель проще тех явлений, которые она по замыслу отображает или объясняет».

В самом общем смысле модель — условный образ объекта исследования, сконструированный для упрощения этого исследования. Модель ДНК, глобус, карта, модель многоугольников, график функции, чертеж, математическая формула являются моделями.

Важным требованием, предъявленным к модели, должна быть её адекватность, т. е. максимальное приближение к реальной ситуации. Создать достаточно адекватную реальности модель очень сложно. Многое зависит от того, какого класса модель была выбрана для принятия решений. Единой системы классификации моделей в настоящее время не существует.

Рассмотрим классификацию, предлагаемую доктором психологических наук, крупным специалистом в области педагогической и математической психологии Л. М. Фридманом.

С точки зрения степени наглядности он все модели разбивает на два класса:

- материальные (вещественные, реальные);
- идеальные.

Построение материальных моделей предусматривает различные вещественные предметы или материалы. Среди материальных моделей выделяют:

- статические (неподвижные)
- динамические (действующие).

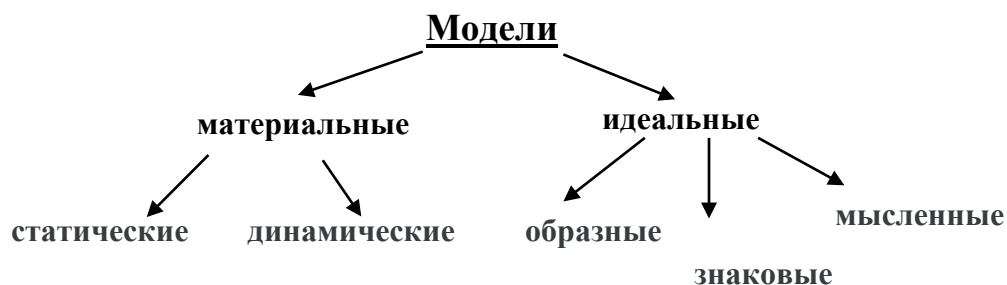
Статические модели по строению подобны оригиналам. Они передают в определенном масштабе пространственные (геометрические) особенности оригиналов. Динамические (действующие) модели воспроизводят различные явления или процессы.

Идеальные модели могут быть трех видов:

- образные (иконические),
- знаковые (знаково-символические)
- мысленные (умственные).

К образным моделям относятся модели, передающие в образной форме особенности моделируемых предметов или явлений на уровне образных представлений (чертежи, рисунки, схемы). Запись знаковых моделей осуществляется знаками-символами, входящими в определенный искусственный язык, способный отражать структуру моделируемого объекта. Мысленные модели отражают явления, процессы или предметы, которые могут отразить теоретическую схему моделируемого объекта. Такой моделью является научное представление о каком-либо явлении, описанное естественным языком.

Можно представить эту классификацию схематически:



Моделирование — процесс создания и исследования таких моделей.

Примеры применения

- в физике: моделирование теплопроводности, гидродинамики, электромагнитных процессов;
- в инженерии: расчёт прочности конструкций, оптимизация технологических процессов;
- в биологии: моделирование популяционной динамики и распространения заболеваний;
- в экономике: построение макроэкономических моделей и моделей оптимального управления;
- в социологии: моделирование процессов миграции и социальной динамики.

1.2. Математическая модель. Математическое моделирование

Для описания модели могут использоваться графические построения, язык биологии, химии, истории т. д. Для описания математических моделей используют язык математики.

Как пишет Н. Н. Моисеев в своей книге [11], при использовании математических методов для анализа какого-либо процесса «необходимо некоторое математическое описание этого процесса, т. е. его описание на языке математики. Его-то мы и называем математической моделью».

Математические модели являются важнейшим видом знаковых моделей, так как знаковое моделирование включает в себя графический, табличный, аналитический виды, пакеты программ и пр. Математические модели могут создаваться из любых математических объектов: чисел, функций, уравнений, графиков, множеств, графов и т. д.

В «Математической энциклопедии» дано такое определение: «Математическая модель — это приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики» [4].

Изучение объектов (явлений) с помощью математической модели называется математическим моделированием.

Математическое моделирование — процесс создания, а также приемы построения и исследования математических моделей.

1.3. Этапы математического моделирования

Общий подход к построению математической модели изучаемого объекта описал в своей работе А.Д. Мышкис [5]. Рассматривая применение метода математического моделирования, он выделяет три этапа.

Первый этап - уточнение проблемы и построение содержательной модели объекта, перевод ее на формальный математический язык.

Второй этап - изучение построенной математической модели путем решения полученной математической задачи.

Третий этап - перевод результата решения задачи на язык той науки, на котором была сформулирована исходная проблема.

Некоторые ученые разделяют процесс математического моделирования на четыре основных этапа. Так, А.Н. Тихонов выделяет следующие этапы: «первый – установление законов, связывающих объекты модели; второй – решение математических задач внутри построенной модели; третий – согласование результатов наблюдений или измерений параметров реальных объектов с теоретическим исследованием построенной модели; четвертый – уточнение и модернизация модели на основании результатов, полученных на третьем этапе» [3]. Оба подхода не противоречат друг другу.

В общем случае, этапы математического моделирования могут быть следующие:

1. Составление математической модели (этап формализации) - вводим формальные обозначения для величин, фигурирующих в задаче; записываем соотношение между ними, исходя из конкретных условий (в виде функции, уравнения, системы уравнений, неравенства, система неравенств и др.).

2. Исследование математической модели — анализ и преобразование математической модели, поиск решения с использованием математических методов.

3. Интерпретация полученного результата — толкование решения в терминах исходной ситуации, получение ответа на вопрос задачи.

Рассмотрим конкретные ситуации и построим соответствующие им модели.

Ситуация 1

Пусть требуется определить, какую сумму следует положить в банк при заданной ставке процента (20 % годовых), чтобы через год получить 12000 рублей?

Решение

Составление математической модели

Вводим обозначения величин:

M_0 — начальная сумма денег;

M_1 — конечная сумма денег;

R — ставка процента.

Запишем соотношение между величинами:

$M_1 = M_0(1 + R/100)$ — математическая модель задачи.

Исследование математической модели

Найдем требуемую величину из решения основного уравнения модели:

$M_0 = M_1/(1 + R/100) = 12000/1,2 = 10000$ (рублей).

Интерпретация полученного результата

Нужно положить в банк 10000 рублей, чтобы через год получить 12000 рублей.

Ситуация 2

Клиенту предложили сделку: он кладёт деньги в банк, где они каждый месяц удваиваются. В это же время клиент платит банку 2400 руб., которые банк изымает из его же денег после каждого их удвоения. Выгодна ли сделка клиенту и при каком условии?

Решение

Составление математической модели

Вводим обозначения:

x рублей — величина первоначального вклада.

Условие выгодности сделки может быть записано неравенством

$2x - 2400 > x$ — математическая модель задачи.

Исследование математической модели.

Решая неравенство, находим: $x > 2400$.

Интерпретация полученного результата: сделка будет выгодна клиенту, если его первоначальный вклад будет больше 2400 рублей. При вложенных 2400 рублей клиент ничего не потеряет, но и ничего не выиграет. При вкладе меньше 2400 рублей клиент будет нести потери.

Математические модели используются в различных областях, например:

- финансовое моделирование — для оценки рисков, прогноза доходности инвестиций и управления портфелем активов;
- прогноз погоды — математические модели, включающие уравнения гидродинамики и термодинамики, позволяют учитывать изменения температуры, давления, влажности и ветра, чтобы предсказать погодные условия на ближайшие дни;
- оптимизация производственных процессов — промышленные предприятия применяют математические модели для оптимизации своих операций, минимизируя затраты и увеличивая прибыль;
- моделирование трафика — математические модели помогают прогнозировать загруженность дорог, планировать маршруты общественного транспорта и разрабатывать стратегии снижения заторов;
- экологическое моделирование — например, модели глобального климата помогают прогнозировать изменения температур, уровней моря и погодных условий в будущем.

2. ПРАКТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

2.1. Формирование приемов математического моделирования у обучающихся в процессе решения прикладных задач

В обучении математике метод математического моделирования целесообразно формировать у учащихся в процессе решения прикладных задач. Прикладная задача – это вид текстовых задач, в которых описывается практико-ориентированная ситуация. Это задачи из окружающей действительности, которые тесно связаны с формированием практических навыков, необходимых в том или ином виде профессиональной деятельности и в повседневной жизни.

В работе [7] предложены следующие четыре типа моделей, используемых в процессе решения задач межпредметной и практико-ориентированной направленности.

1. Модели формально-логического типа (формализация рассуждений средствами логики высказываний).
2. Аналитические модели (процессы функционирования реальных объектов или систем, записываются в виде явных функциональных зависимостей). При этом выделяют: модели преобразования, модели-уравнения, модели-неравенства, модели-системы уравнений, модели-оптимизации и др.
3. Геометрические модели, использующие плоские и пространственные геометрические объекты.
4. Вероятностно-статистические модели (вероятностные характеристики случайных событий, анализ статистических данных и их статистическая обработка).
5. Модели смешанного типа.

При решении практических задач особенно часто используются их аналитические, геометрические и модели смешанного типа.

Рассмотрим примеры применения моделей различных типов в процессе решения прикладных задач на уроках математики.

Задача 1 (модель–система уравнений)

Фирма выпускает 2 вида мороженого: сливочное и шоколадное. Для изготовления используются 2 исходных продукта: молоко и наполнители, расходы которых на 1 кг мороженого и суточные запасы исходных продуктов даны в таблице.

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на 1 кг мороженого		Запас, кг
	сливочное	шоколадное	
Молоко	0,8	0,5	400
Наполнители	0,4	0,8	365

Определить количество мороженого каждого вида, которое должна производить фирма ежедневно.

Решение

Составление математической модели

Вводим обозначения величин:

x — суточный объем выпуска сливочного мороженого, кг;

y — суточный объем выпуска шоколадного мороженого, кг.

В соответствии с расходом сырья каждого вида получаем систему:

$$\begin{cases} 0,8x + 0,5y = 400; \\ 0,4x + 0,8y = 365. \end{cases}$$

Записанная система уравнений представляет собой математическую модель задачи.

Исследование математической модели

Решение этой системы можно получить с помощью математического метода, например, метода сложения или подстановки. Решая систему любым способом, находим (312,5; 300).

Интерпретация полученного результата:

фирма должна производить 312,5 кг сливочного мороженого и 300 кг шоколадного мороженого в день.

Задача 2 (модель–уравнение)

Бригада рабочих должна была изготовить за смену 7200 изделий, причем каждый рабочий планировал изготовить одинаковое количество изделий. Однако трое рабочих заболели, поэтому для выполнения нормы каждому из оставшихся рабочих пришлось сделать на 400 изделий больше. Сколько рабочих было в бригаде первоначально?

Решение

Составление математической модели

Вводим обозначения величин:

x — число рабочих в бригаде;

$\frac{7200}{x}$ — количество изделий по плану (плановая производительность);

$\frac{7200}{x-3}$ — количество изделий фактически (фактическая производительность).

По условию задачи получаем:

$$\frac{7200}{x-3} - \frac{7200}{x} = 400 \text{ — математическая модель.}$$

Исследование математической модели

Решаем полученное уравнение:

$$\frac{18}{x-3} - \frac{18}{x} = 1;$$

$$x^2 - 3x - 54 = 0;$$

$$x_1 = 9;$$

$$x_2 = -6 \text{ (не подходит по смыслу задачи).}$$

Интерпретация полученного результата: в бригаде было 9 рабочих.

Задача 3 (модель—уравнение)

Состоявшееся в конце года собрание акционеров некоторого предприятия постановило распределить прибыль 5 600 000 руб. следующим образом: большую часть прибыли направить в фонд развития предприятия, 25 % от этой суммы использовать для выплаты дивидендов акционерам, а 15 % — использовать на социальные нужды работников. Определить, сколько денег было выделено на каждое направление и какова стоимость акций?

Решение

Составление математической модели

Вводим обозначения величин:

x — часть прибыли в фонд развития предприятия, рублей;

$0,25x$ — для выплаты дивидендов, рублей;

$0,15x$ — на социальные нужды, рублей.

По условию задачи получаем:

$$x + 0,25x + 0,15x = 5\,600\,000 \text{ — математическая модель.}$$

Исследование математической модели

Решая полученное уравнение, находим: $x = 4\,000\,000$.

Интерпретация полученного результата:

4 000 000 рублей — часть прибыли в фонд развития предприятия;

$0,25 \cdot 4\,000\,000 = 1\,000\,000$ рублей — для выплаты дивидендов;

$0,15 \cdot 4\,000\,000 = 600\,000$ рублей — на социальные нужды.

Задача 4 (модель—система уравнений)

Работница кондитерского цеха имеет ежедневное задание на изготовление определенного количества тортов. Она подсчитала, что если ей удастся изготовлять на один торт в час больше, то она закончит работу на 0,5 ч раньше, если же в час будет изготавливаться на пять тортов больше, то задание будет выполнено на два часа раньше. Сколько тортов в обычном режиме надо изготавливать работнице за рабочий день?

Составление математической модели

Вводим обозначения величин:

x — количество часов на выполнение ежедневного задания;

y — количество тортов в час;

xy — ежедневное задание.

По условию задачи, составляем математическую модель:

$$\begin{cases} xy = (x - 0,5)(y + 1); \\ xy = (x - 2)(y + 5). \end{cases}$$

Исследование математической модели

Решая систему, находим: $x = 8$; $y = 15$; $xy = 120$.

Интерпретация полученного результата:

надо изготавливать 120 тортов за рабочий день.

Задача 5 (модель—уравнение)

Кондитерский цех должен был изготовить 8000 одинаковых изделий в определенный срок. Фактически работа была выполнена на 8 дней раньше срока, так как цех ежедневно выпускал на 50 изделий больше, чем было предусмотрено планом. В какой срок цех должен был закончить работу и насколько процентов ежедневно перевыполнялся план?

Решение

Составление математической модели

Вводим обозначения величин:

x — дней по плану;

$\frac{8000}{x}$ — количество изделий в день по плану (плановая производительность);

$\frac{8000}{x-8}$ — количество изделий фактически (фактическая производительность).

По условию задачи получаем:

$$\frac{8000}{x-8} - \frac{8000}{x} = 50 \text{ — математическая модель.}$$

Исследование математической модели

Решая полученное уравнение, находим:

$$x_1 = 40; \quad x_2 = -32 \text{ (не подходит по смыслу задачи).}$$

$$\text{Перевыполнение плана: } \frac{50}{200} \cdot 100 \% = 25 \%.$$

Интерпретация полученного результата:

цех должен был закончить работу по плану за 40 дней; план перевыполнен на 25%.

Приведенные ниже задачи описывают разнообразные ситуации, где нужно найти наилучшее решение из возможных. Такие задачи называются задачами оптимизации. В каждой из этих задач необходимо составить функцию, устанавливающую связь между двумя величинами (например, между объемом производства и прибылью компании), и исследовать ее на экстремум. В задачах на оптимизацию, как правило, выделяют такой аспект как ограничения (то, что ограничивает наши решения).

Задача 6 (модель—оптимизация)

Затраты на производство продукции объема x задаются функцией $C(x) = x^2 + 5x + 4$. Производитель реализует продукцию по цене 25 рублей. Найти максимальную прибыль и соответствующий объем продукции.

Решение

Составление математической модели

Вводим обозначения величин:

x — объем продукции;

Π — прибыль;

U — выручка;

C — затраты;

Используя формулу $\Pi = U - C$, составляем функцию:

$$\Pi(x) = 25x - (x^2 + 5x + 4);$$

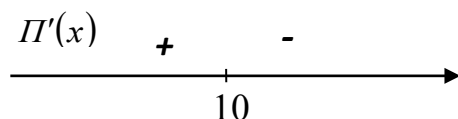
$$\Pi(x) = -x^2 + 20x - 4; \text{ ограничения: } x \in (0; +\infty).$$

Исследование математической модели

Составленную функцию исследуем на экстремум с помощью производной:

$$\Pi'(x) = -2x + 20; \quad \Pi'(x) = 0; \quad -2x + 20 = 0;$$

$x = 10$ — критическая точка.



$x = 10$ — точка максимума:

$$\Pi(10) = -10^2 + 20 \cdot 10 - 4 = 96.$$

Интерпретация полученного результата:

максимальная прибыль, равная 96 ден. ед., достигается при объеме продукции 10 единиц.

Задача 7. Модель смешанного типа (геометрическая модель, модель–оптимизация)

Из всех прямоугольников данного периметра найти тот, у которого площадь наибольшая.

Решение

Составление математической модели

Вводим обозначения величин:

P — периметр;

x — длина одной из сторон;

$\frac{P-2x}{2}$ — длина другой стороны.

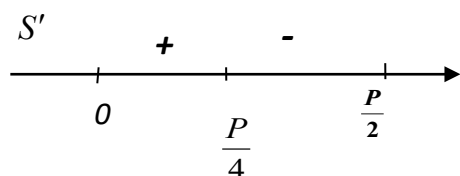
Составим функцию: $S = x \cdot \frac{P-2x}{2} = x \left(\frac{P}{2} - x \right) = \frac{P}{2}x - x^2$; ограничения: $0 < x < \frac{P}{2}$.

Исследование математической модели

Исследуем функцию $S = \frac{P}{2}x - x^2$ на экстремум с помощью производной:

$$S' = \left(\frac{P}{2}x - x^2 \right)' = \frac{P}{2} - 2x; \quad \frac{P}{2} - 2x = 0; \quad 2x = \frac{P}{2};$$

$$x = \frac{P}{4}.$$

**Интерпретация полученного результата:**

из всех прямоугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

При решении прикладных задач необходимо добиться четкого понимания значения и содержания каждого из вышеописанных этапов математического моделирования.

2.2. Результаты применения метода математического моделирования

Для получения результатов проводился анализ содержания учебников по математике, и выявлялись их возможности для формирования у приемов математического моделирования; проводился анализ и обобщение собственного опыта преподавания математических дисциплин.

В учебниках по математике представлены в основном уже готовые математические задачи, в решении которых отсутствует первый этап математического моделирования, поэтому обучающиеся часто испытывают значительные трудности при решении прикладных задач, особенно на этапе формализации.

В системе задач школьных учебников должно быть больше задач, содержащих термины из различных научных областей, но не требующих длительного и громоздкого объяснения их сущности. Кроме этого, задачи расширяют словарный запас обучающихся, знакомят с новыми интересными фактами из разных наук, способствуют сознательному применению имеющихся знаний к жизни.

Сложности при решении задач возникают в результате того, что не всегда выбор переменных является рациональным. Удачный выбор переменных помогает легче составить математическую модель задачи, и получить наиболее простую для реализации модель

При решении задач посредством моделирования обучающиеся учатся абстрагированию, анализу, синтезу, сравнению, аналогии, обобщению, переводу жизненных проблемных ситуаций в абстрактные модели и наоборот.

Включение моделирования в содержание уроков математики необходимо для ознакомления учащихся с современной научной трактовкой понятий модели и моделирования, овладения моделированием как методом научного познания и решения сюжетных задач;

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (далее – ФГОС СОО) (утвержден приказом Министерства образования и науки РФ от 17.05.2012 № 413, редакция от 27.12.2023).
2. Бабанская О.С. Метод математического моделирования в обучении учащихся решению прикладных задач в средней школе // *Universum: психология и образование*, 2019, № 12 (66). URL: <https://7universum.com/ru/psy/archive/item/8410> (дата обращения: 04.11.2022).
3. Егупова М.В. Практико-ориентированное обучение математике в школе как предмет методической подготовки учителя: монография. — М.: МПГУ, 2014. — 284 с.
4. Математическая энциклопедия. Т. 3 / Гл. ред. И.М. Виноградов. — М.: Советская энциклопедия, 1982. — 1184 с.
5. Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей. Изд. 3-е, испр. — М.: КомКнига, 2007. — 192 с.
6. Нахман А.Д. Формирование компетенции математического моделирования в условиях реализации концепции развития математического образования // *Международный журнал экспериментального образования*, 2016, № 2-2. — С. 282–286.
7. Нахман А.Д. Концепция математического моделирования в содержании математического образования: монография. — Тамбов: ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации», 2015. — 121 с.
8. Капкаева Л.С. Формирование приемов математического моделирования у студентов педагогического направления в процессе решения практико-ориентированных задач. // *Современные наукоемкие технологии*, 2022, № 12(2). — С. 323–331.
9. Коржов Е.Н. Математическое моделирование: учебное пособие. — Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2012. — 74 с.
10. Королев М.Е. Методика организации математического кружка для абитуриентов «Математическое моделирование в технических задачах» / М.Е. Королев, Е.И. Скафа, А.С. Черкез // *Научные вести: Научный журнал*. — 2021, № 3 (32). — С. 50–69.

ВНЕДРЕНИЕ МЕТОДА РАЦИОНАЛИЗАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ И ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ В УЧЕБНЫЙ ПРОЦЕСС

Шкирко Наталья Николаевна,

преподаватель математики высшей квалификационной категории,
Красносулинский колледж промышленных технологий
(ГБПОУ РО «ККПТ»)

АННОТАЦИЯ

Описан опыт внедрения метода рационализации (метода замены множителей) в процесс обучения математике студентов колледжа. Дана оценка эффективности метода рационализации для повышения качества математической подготовки студентов и оптимизации учебного процесса. Разработана система упражнений с применением метода для разных уровней подготовки студентов, сравнены результаты решения задач традиционным способом и методом рационализации, оценено влияние метода на скорость и точность выполнения заданий.

Результаты внедрения метода в учебный процесс — сократилось время решения сложных неравенств, уменьшилось количество ошибок, связанных с преобразованием выражений, студенты лучше усвоили принципы равносильности преобразований и работу с областью допустимых значений.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность внедрения метода рационализации в учебный процесс среднего профессионального образования (СПО) обусловлена рядом факторов, связанных с современными образовательными стандартами, требованиями к формированию компетенций и практико-ориентированностью обучения.

Соответствие ФГОС нового поколения. ФГОС СПО нового поколения ориентирован на формирование универсальных компетенций, развитие личности студента, умение применять математические инструменты в профессиональной деятельности и повседневной жизни, а также развитие критического мышления и способности к самостоятельному решению задач. Метод рационализации может способствовать формированию этих навыков, так как позволяет упрощать сложные математические задачи, делая их решение более эффективным.

Компетентностный подход. Обучение математике в СПО должно быть направлено не только на передачу знаний, но и на формирование практических умений и навыков, обеспечивающих готовность выпускника к профессиональной деятельности. Метод рационализации может помочь в овладении навыками математического моделирования, что является важной частью подготовки специалистов.

Практическая направленность обучения. Интеграция математики с профессиональными модулями, решение задач с производственным содержанием, использование профессиональных кейсов и ситуаций способствуют тому, что студенты видят практическую ценность изучаемых математических понятий и методов. Это повышает мотивацию и качество усвоения материала. Метод рационализации может быть частью системы задач, направленных на расширение знаний о трудовой деятельности и осознанной ориентации в профессиональной среде.

Развитие аналитических и практических навыков. Современные подходы к преподаванию математики в СПО акцентируют внимание на деятельностном и личностно-ориентированном подходах, которые стимулируют активный поиск решений, критическое осмысление учебного материала, работу с информацией. Метод рационализации может способствовать развитию умения анализировать ситуации и находить рациональные решения.

Интенсификация обучения. Интенсификация общеобразовательной подготовки включает организационные инструменты и методы, активизирующие познавательные способности обучающихся. Метод рационализации может быть одним из инструментов интенсификации учебного процесса, позволяя быстрее и эффективнее решать сложные математические задачи.

Таким образом, внедрение метода рационализации в учебный процесс СПО актуально, так как он способствует повышению качества математической подготовки, формированию ключевых компетенций, развитию прикладного мышления и подготовке студентов к будущей профессиональной деятельности.

Объект исследования: процесс обучения решению математических неравенств у студентов колледжа.

Предмет исследования: метод рационализации как инструмент упрощения решения логарифмических, показательных.

Цель работы — раскрыть потенциал метода рационализации как эффективного инструмента решения сложных математических неравенств на уроках математики, показать его роль в развитии логического мышления и вычислительных навыков студентов.

Задачи:

- изучить теоретические основы метода рационализации и его применимость к задачам, изучаемым в колледже;
- разработать комплекс учебных заданий с применением метода для студентов разных специальностей;
- внедрить метод в учебный процесс на занятиях по математике в колледже;
- сравнить результаты решения задач традиционным способом и методом рационализации;
- оценить влияние метода на скорость и точность выполнения заданий, включая задачи прикладного характера;
- проанализировать динамику интереса студентов к изучению математики.

Методы исследования:

- анализ учебной и методической литературы;
- наблюдение за учебной деятельностью студентов;
- тестирование и сравнение результатов выполнения заданий.

Использованные источники: книги и статьи Г. Фёдорова, Т. Бенгиной, Э. Фазлеевой, указанные ниже в списке источников.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА

Очевидно, что одно и то же неравенство можно решить несколькими способами. Удачно выбранным способом или, как мы привыкли говорить, рациональным способом любое неравенство решится быстро и легко, решение его получится красивым и интересным.

Часто, при решении логарифмических неравенств, встречаются задачи с переменным основанием логарифма. Так, неравенство вида

$$\log_{f(x)} g(x) > \log_{f(x)} \varphi(x)$$

является стандартным неравенством. Как правило, для его решения применяется переход к равносильной совокупности систем:

$$\log_{f(x)} g(x) > \log_{f(x)} \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ 0 < g(x) < \varphi(x) \\ f(x) > 1 \\ g(x) > \varphi(x) > 0. \end{cases}$$

Недостатком данного метода является необходимость решения семи неравенств, не считая двух систем и одной совокупности. Уже при данных квадратичных функциях решение совокупности может потребовать много времени. Можно предложить альтернативный, менее трудоемкий метод решения этого стандартного неравенства. Это метод рационализации неравенств, известный в математической литературе под названием декомпозиции.

2. МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ

Метод декомпозиции заключается в замене сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$, при которой неравенство $G(x) \vee 0$ равносильно неравенству $F(x) \vee 0$ в области определения $F(x)$.

Используемые обозначения: f, g, h — выражения с переменной x , a — фиксированное число или функция ($a > 0, a \neq 1$).

Таблица 1

Выражение F	Выражение G
$\log_a f - \log_a g$	$(a - 1)(f - g)$
$\log_a f - 1$	$(a - 1)(f - a)$
$\log_a f$	$(a - 1)(f - 1)$
$\log_h f - \log_h g$	$(h - 1)(f - g)$
$\log_h f - 1$	$(h - 1)(f - h)$
$\log_h f$	$(h - 1)(f - 1)$
$\log_f h - \log_g h$	$(f - 1)(g - 1)(h - 1)(g - f)$
$\log_h f \cdot \log_p k$	$(h - 1)(f - 1)(p - 1)(k - 1)$
$\frac{\log_a f - \log_a g}{\log_b h}$	$\frac{(a - 1)(f - g)}{(b - 1)(h - 1)}$
$h^f - h^g$	$(h - 1)(f - g)$
$h^f - 1$	$(h - 1) \cdot f$
$a^f - a^g$	$(a - 1)(f - g)$
$f^h - g^h$	$(f - g) \cdot h$
$\sqrt[n]{f} - \sqrt[n]{g}$	$f - g$

Из данных выражений можно вывести такие следствия (с учетом области определения):

$$\log_h f \cdot \log_p k \vee 0 \Leftrightarrow (h - 1)(f - 1)(p - 1)(k - 1) \vee 0;$$

$$\log_h f + \log_h k \Leftrightarrow (fk - 1)(h - 1) \vee 0;$$

$$\sqrt{f} - \sqrt{k} \vee 0 \Leftrightarrow f - k \vee 0;$$

$$\frac{h^f - h^k}{h^p - h^q} \vee 0 \Leftrightarrow \frac{f - k}{p - q} \vee 0$$

$$f^h - k^p \vee 0 \Leftrightarrow (a - 1)(\log_a f^h - \log_a k^p) \vee 0.$$

В указанных равносильных переходах символ " $\vee$ " заменяет один из знаков неравенств: $>, <, \leq, \geq$.

Комментарий

При использовании метода рационализации студенты допускают следующие ошибки:

а) проводят рационализацию без учета области определения данного неравенства;
 б) применяют метод рационализации к неравенствам, не приведенным к стандартному виду $F(x) \vee 0$;

в) формально применяют метод рационализации к выражению вида $\log_a f(x) + \log_a g(x)$, заменяя его на выражение $f(x) + g(x)$;

г) подменяют формулировку «о совпадении знаков выражений для каждого допустимого значения x » на неверную формулировку «о совпадении значений выражений для каждого допустимого значения x ».

3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЙ ДВУМЯ МЕТОДАМИ

Пример 1

$$\log_{6x+11} 5 \geq 1.$$

1. Решение стандартным методом

$$\log_{6x+11} 5 \geq \log_{6x+11} (6x + 11).$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 6x + 11 > 0 \\ 6x + 11 \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -\frac{11}{6} \\ x \neq -\frac{5}{3} \end{cases}$$

$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} 6x + 11 > 1 \\ 5 \geq 6x + 11 \end{cases} \\ & \begin{cases} x > -\frac{5}{3} \\ x \leq -1 \end{cases} \\ & -\frac{5}{3} < x \leq -1. \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{b) } & \begin{cases} 0 < 6x + 11 < 1 \\ 5 \leq 6x + 11 \end{cases} \\ & \begin{cases} -\frac{11}{6} < x < -\frac{5}{3} \\ x \geq -1 \end{cases} \\ & \text{нет решения.} \end{aligned}$
--	--

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{5}{3}; -1 \right].$$

2. Решение методом декомпозиции (рационализации)

Алгоритм метода рационализации

1. Рассмотреть ОДЗ неравенства.
2. Заменить исходное неравенство неравенством из второй колонки таблицы.
3. Упростить полученное неравенство
4. Решить полученное рациональное неравенство.
5. Записать ответ исходного неравенства, учитывая ОДЗ.

$$\log_{6x+11} 5 \geq 1$$

$$\log_{6x+11} 5 - 1 \geq 0$$

$$\begin{cases} (6x + 11 - 1)(5 - 6x - 11) \geq 0 \\ 6x + 11 > 0 \\ 6x + 11 \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} (6x + 10)(-6x - 6) \geq 0 \\ x > -\frac{11}{6} \\ x \neq -\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$(6x + 10)(-6x - 6) \geq 0$$

$$\begin{cases} 6x + 10 = 0 \\ -6(x + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ x = -1 \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{5}{3}; -1\right]$.

Пример 2

$$\log_{\log_x 2x}(5x - 2) \geq 0$$

1. Решение стандартным методом

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 5x - 2 > 0, \\ \log_x 2x > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ \log_x 2x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{5}, \\ \log_x 2x > \log_x 1, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq 2x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{5}, \\ x \neq 1, \\ 2x < 1, \\ 0 < x < 1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > \frac{2}{5}, \\ x \neq 1, \\ 2x > 1, \\ x > 1, \end{cases}$$

$$\frac{2}{5} < x < 0,5; \quad x > 1.$$

$$\log_{\log_x 2x}(5x - 2) \geq \log_{\log_x 2x} 1$$

$$a) \begin{cases} 0 < \log_x 2x < 1 \\ 5x - 2 \leq 1 \\ \frac{2}{5} < x < 0,5 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{5} < x < 0,5 \\ x < 2x < 1 \\ x \leq 0,6 \\ x > 1 \\ 1 < 2x < x \\ x \geq 0,6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{5} < x < 0,5 \\ 0 < x < 0,5 \\ x \leq 0,6 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{5} < x < 0,5;$$

$$б) \begin{cases} \log_x 2x > 1 \\ 5x - 2 \geq 1 \\ \frac{2}{5} < x < 0,5 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{5} < x < 0,5 \\ 2x < x \\ x \leq 0,6 \\ x > 1 \\ 2x > x \\ x \geq 0,6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 0 \\ x \geq 0,6 \end{cases} \Rightarrow x > 1.$$

Ответ: $\frac{2}{5} < x < 0,5; \quad x > 1.$

2. Решение методом рационализации

$$\log_{\log_x 2x}(5x - 2) \geq \log_{\log_x 2x} 1$$

$$\begin{cases} (\log_x 2x - 1)(5x - 2 - 1) \geq 0, \\ \log_x 2x > 0, \\ \log_x 2x \neq 1, \\ 5x - 2 > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\log_x 2x - \log_x x)(5x - 3) \geq 0, \\ x > 0,4, \\ (x - 1)(2x - 1) > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{cases} (x - 1)(2x - x)(5x - 3) \geq 0, \\ x > 0,4, \\ x \neq 1, \\ \begin{cases} x < 0,5 \\ x > 1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 0,6 \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 0,4, \\ x \neq 1 \\ \begin{cases} x < 0,5 \\ x > 1 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow 0,4 < x < 0,5; \quad x > 1.$$

Ответ: $x \in (0,4; 0,5) \cup (1; +\infty)$

Пример 3

$$(4x^2 + 2x + 1)^{x^2 - x} > 1$$

Решение

$$(4x^2 + 2x + 1)^{x^2 - x} > 1; (x^2 - x)((4x^2 + 2x + 1) - 1) > 0;$$

$$x^2(x - 1)(2x + 1) > 0; \quad x \in (-\infty; -0,5) \cup (1; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -0,5) \cup (1; +\infty)$

Пример 4

$$(x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2 + x + 1)^3$$

Решение

$$(x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2 + x + 1)^3; \left(\frac{x+5}{x+2} - 3\right)((x^2 + x + 1) - 1) \geq 0;$$

$$\frac{(-2x - 1)x(x + 1)(x^2 + x + 2)}{x + 2} \geq 0; x \in (-2; -1] \cup [-0,5; 0]$$

Ответ: $(-2; -1] \cup [-0,5; 0]$.

Таким образом, метод рационализации — это инструмент, который помогает решать сложные уравнения и неравенства, упрощая их структуру и ускоряя процесс решения. Его применение оправдано при работе с определёнными типами выражений, где стандартные методы неэффективны.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ВНЕДРЕНИЯ МЕТОДА

В ходе внедрения данного метода получены следующие результаты:

1. **Сокращение времени решения.** Применение метода рационализации позволило сократить среднее время решения сложных неравенств по сравнению с традиционными методами.
2. **Снижение количества ошибок.** Число вычислительных и логических ошибок уменьшилось, поскольку метод минимизирует необходимость рассмотрения множества частных случаев.
3. **Улучшение понимания материала.** Студенты группы отметили, что метод помог им лучше понять принципы равносильных преобразований и работу с областью допустимых значений (ОДЗ).
4. **Рост мотивации и вовлечённости.** По результатам внедрения метода рационализации студенты стали проявлять больший интерес к решению математических задач благодаря наглядности и эффективности метода.
5. **Универсальность применения.** Метод успешно использовался для решения:
 - логарифмических неравенств с переменным основанием;
 - показательных неравенств;
 - комбинированных задач, встречающихся в прикладных дисциплинах (экономика, физика, информатика).
6. **Формирование профессиональных навыков.** У студентов развились:
 - аналитическое и алгоритмическое мышление;
 - умение выбирать оптимальный способ решения;
 - навыки самопроверки и контроля результата;
 - способность применять математические методы в смежных дисциплинах.
7. **Положительная обратная связь.** Преподаватели отметили, что студенты стали увереннее справляться с заданиями повышенной сложности и активнее участвовать в обсуждениях на занятиях.

5. ВЫВОДЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ

Метод рационализации доказал свою **практическую ценность** в системе среднего профессионального образования:

- упрощает решение сложных неравенств без потери строгости;
- экономит учебное время, позволяя уделить больше внимания прикладным задачам и междисциплинарным связям;
- повышает качество математической подготовки студентов;
- способствует развитию математического и алгоритмического мышления;
- улучшает результаты текущего и промежуточного контроля.

Практическая значимость. Материалы темы могут быть использованы при изучении технических дисциплин, связанных с машиностроением, электротехникой, строительством и другими отраслями.

Учёт профессиональной направленности. При преподавании математики в СПО можно использовать задачи с профессиональным содержанием, что позволяет показать прикладное значение математических методов и их роль в будущей профессии.

Дисциплины с профессиональной направленностью. Метод рационализации можно интегрировать в курсы, где требуется решение задач, связанных с конкретной отраслью или специальностью. Например, в технологических, естественно-научных или социально-экономических программах студенты могут сталкиваться с неравенствами, требующими применения этого метода для анализа производственных процессов, моделирования ситуаций или решения задач, связанных с конкретной профессией.

Междисциплинарные курсы и проекты. Метод рационализации может использоваться в рамках проектов, где требуется решение задач, требующих сочетания математических знаний с профессиональными компетенциями. Например, анализ данных, моделирование производственных процессов или решение задач из смежных областей.

Соответствие целям обучения. В системе СПО важно формировать умения применять математические знания для решения профессиональных задач. Метод рационализации способствует развитию логического, алгоритмического и математического мышления, что соответствует этим целям.

Рекомендации:

- включать изучение метода рационализации в программу математических дисциплин колледжа (1–2 курсы);
- начинать с простых примеров и постепенно переходить к сложным комбинированным задачам;
- использовать метод при подготовке к промежуточной аттестации и профессиональным модулям;
- интегрировать метод в междисциплинарные проекты (например, при решении экономических или физических задач).

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Фёдоров Г. С. Метод рационализации при решении различного типа неравенств. — Москва: Издательство, 2024. — 38 с.
2. Бенгина Т. А. О методе рационализации при решении показательных неравенств // Международный научный журнал «Символ науки». — 2018 год.
3. Фазлеева Э. И. О применении метода рационализации при решении неравенств. kpfu.ru
4. Эффективные пути решения неравенств. Учеб. пособие / под ред. В. И. Голубева, В. А. Тарасова. 1992.
5. Уравнения, неравенства и их системы. Методическое руководство для студентов математических факультетов. Часть 2-я. / Сост. Л.Р. Шакирова, Н.В. Тимербаева, Э.И. Фазлеева. — Казань: ТГГПУ, 2008. — 96 с.
6. Шестаков С. Письменный экзамен. Неравенства и системы неравенств // Математика, 2004, № 12. — С. 29–32.

ГАПОУ РО «РКТМ»

**Областной конкурс
творческих работ
«ПЕДАГОГИ — НАУКЕ»**

**РАБОТЫ
В НОМИНАЦИИ
«АСТРОНОМИЧЕСКИЕ
ИССЛЕДОВАНИЯ»**

ПРОСТЕЙШИЕ МОДЕЛИ ПЛАНЕТНЫХ СИСТЕМ

КОПЕРНИКА И ПТОЛЕМЕЯ:

ТЕОРИЯ, ФОРМУЛЫ, РАСЧЕТЫ

Шульга Сергей Анатольевич,

к. т. н., преподаватель физики высшей квалификационной категории,
Ростовский колледж технологий машиностроения
(ГБПОУ РО «РКТМ»)

АННОТАЦИЯ

Для простейших моделей планетных систем Коперника и Птолемея (гелиоцентрической и геоцентрической систем) получены формулы, определяющие важные параметры орбит и положений планет, в том числе формулы, описывающие основную особенность видимого движения планет — попятное движение.

Формулы определяют гелиоцентрические долготы точек противостояния, соединения и стояния, гелиоцентрический угол между точками стояния, длину дуги и период попятного движения в зависимости от радиуса орбиты планеты. Решения выполнены тремя разными методами — экстремальным и кинематическими по системам Коперника и Птолемея.

Показана математическая тождественность простейших моделей Коперника и Птолемея.

Показано, что вывод формул попятного движения и сами формулы соответствуют уровню школьной математики, то есть желательно присутствие этих формул в школьной учебной литературе.

Проанализированы решения для попятных движений, имеющиеся в известных задачниках и учебниках, описаны и исправлены ошибки в этих решениях.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	101
1. Видимое движение планет. Попятные движения	101
2. Простейшая модель Коперника	103
2.1. Описание модели	103
2.2. Конфигурации планет и синодическое уравнение	106
2.3. Видимые долготы и угловая скорость планеты	107
3. Простейшая модель Птолемея	108
4. Элонгация планеты	109
5. Формулы геометрической связи гелиоцентрической и геоцентрической долгот планеты	111
5.1. Внешние планеты	111
5.2. Внутренние планеты	112
6. Экстремальные параметры движения планет	112
6.1. Экстремальные значения видимой угловой скорости планеты	112
6.2. Определение параметров движения планет по данным наблюдений	113
6.3. Движение внутренних планет вблизи Солнца	114
6.4. Угловые конфигурации внутренних планет	115
6.5. Угловые конфигурации внешних планет	116
6.6. Попятные движения по простейшей модели Коперника	116
6.6.1. Определение параметров попятного движения экстремальным методом	116
6.6.2. Период и видимая дуга попятного движения	118
6.6.3. Еще формулы для точек стояния	120
6.6.4. Другой метод определения параметров попятного движения	121
6.7. Попятные движения по простейшей модели Птолемея	122
7. Расчеты	122
8. Как представлены формулы попятного движения в школьной учебной литературе	123
9. Сводка уравнений попятного движения	124
Выводы	126
Список источников	126

ВВЕДЕНИЕ

Основной, характернейшей особенностью видимого движения планет на небесной сфере является их попятное движение со всевозможными петлями и зигзагами. Во всех учебниках по общей астрономии обязательно присутствуют описание такого движения и графическое объяснение образования петель. И отсутствуют формулы, определяющие основные параметры попятного движения, хотя эти формулы безусловно важны (т. к. относятся к важному феномену планетного движения), в первом приближении достаточно просты и вывод их не выходит за рамки школьной математики. Более того, во всех семи изданиях одного знаменитого задачника по астрономии и трех университетских учебниках такие формулы приведены в очень неправильном виде.

Цель настоящей работы — вывод формул, определяющих важные параметры орбит и положений планет для простейших моделей планетных систем Коперника и Птолемея (гелиоцентрической и геоцентрической систем), в том числе формул, описывающих основную особенность видимого движения планет — попятное движение.

1. ВИДИМОЕ ДВИЖЕНИЕ ПЛАНЕТ. ПОПЯТНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

Небесная сфера, как всем нам видно, вращается с востока на запад (если в наших северных широтах смотреть на юг) и за одни сутки делает один оборот с небольшой добавкой. Один оборот на 360° — за счет суточного вращения Земли вокруг своей оси, малая добавка $\Delta = 360/T_Z$ — вследствие её годового обращения вокруг Солнца (T_Z — число дней в году, т. е. полный поворот за один год на 360° разбивается на 365,26 малых суточных смещений).

Звезды на самой небесной сфере неподвижны, т. е. и движутся вместе с ней как единое целое по своим небесным параллелям вокруг оси мира (более точно — вследствие движения звезд в пространстве они смещаются и на небесной сфере, но требуются века, чтобы это увидеть). Движение Солнца несколько отличается — как и все звезды, оно участвует в суточном вращении, но так как Земля обращается именно вокруг Солнца, то оно совершает ещё и годовое движение по своей параллели (эклиптике) навстречу звездам, т. е. с запада на восток, делая один оборот за один год, а за сутки — тот самый малый доворот Δ . Все эти движения называются видимыми — т. к. на деле вращаемся вместе с Землей вокруг земной оси и вокруг Солнца мы, наблюдатели.

Планеты путешествуют по небесной сфере куда более сложно (рис. 1), почему и названы «странниками» (по-древнегречески): к суточному вращению вместе с небесной сферой и звездами добавляется замысловатое движение среди звезд, объясняемое тем, что мы наблюдаем обращающуюся вокруг Солнца планету с Земли, также обращающейся вокруг Солнца. Вместе с тем смещение планет относительно звезд в течение малого времени (за несколько часов) очень мало; заметным это смещение становится, если фиксировать и соединять линией положение планеты на небосводе через, например, сутки.

Перемещение планет относительно звезд в направлении годового движения Солнца (т. е. с запада на восток, против движения звезд) называется прямым движением. Характернейшей же особенностью движения планет является регулярная смена направления их движения среди звезд на противоположное (это — т. н. обратное или попятное движение планет); в результате этого планеты выписывают на небосводе разнообразные зигзаги и петли.

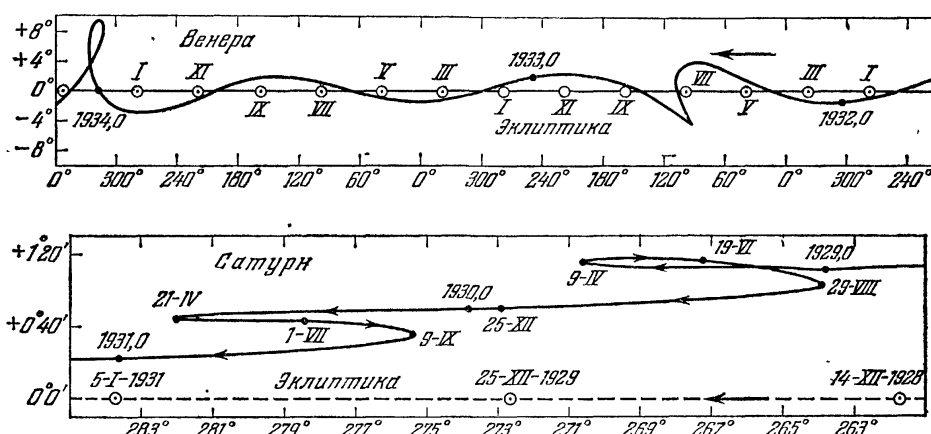


Рис. 1. Движение Венеры и Солнца в 1932—1933 гг. Показано положение Солнца первого числа указанных месяцев. Движение Сатурна в 1929—1930 гг. Положение Солнца показано лишь вблизи начала каждого года. Пунктиром отмечена эклиптика [1, рис. 170]

Понятно при этом, что такая особенность свойственна не только планетам, но и всем телам Солнечной системы, обращающимся вокруг Солнца. Зигзаги и петли появляются вследствие наклона орбит планет к плоскости эклиптики (плоскости земной орбиты); если бы наклон отсутствовал, то планеты двигались бы в точности по эклиптике, но опять-таки «туда-обратно». Зигзаг или петля — это зависит от того, в каком месте эклиптики наблюдается данное попятное движение. Попятное движение занимает меньшую часть орбитального периода (уменьшается от 26,1 % у Меркурия до 0,3 % у Нептуна).

Очевидно, что прямое и обратное движения разделяет момент остановки планеты на небосводе — это т. н. стояние; промежуток времени между стояниями при обратном движении называется периодом попятного движения.

Откроем любой из 4-х российских учебников астрономии из федерального их перечня прошлых лет (это учебники Б.А. Воронцова-Вельяминова, А.В. Засова и В.Г. Сурдина, Е.П. Левитана, В.М. Чаругина; сейчас допущен к использованию только учебник Б.А. Воронцова-Вельяминова): в главах, посвященных видимому движению планет, есть обязательно 2 рисунка — с видимой петлей планеты (а именно, Марса) и графическим объяснением этого движения. При этом, например, в учебнике Б.А. Воронцова-Вельяминова отмечено [2, стр. 51]: «Наиболее сложной задачей оказалось объяснение петлеобразного движения планет» (имеется в виду объяснение с точки зрения геоцентрической модели), а на стр. 52 указано: «Коперник показал, что суточное движение всех светил можно объяснить вращением Земли вокруг оси, а петлеобразное движение планет — тем, что все они, включая Землю, обращаются вокруг Солнца». В учебнике Е.П. Левитана говорится однозначно в пользу гелиоцентрической системы [3, стр. 34]: «Петлеобразное движение планет долгое время оставалось загадочным и, как вы скоро узнаете, нашло простое объяснение в учении Коперника».

Вместе с тем модель Птолемея описывает попятное движение не менее наглядно и просто, нежели чем модель Коперника (об этом ниже). Предубеждения против системы Птолемея нет в учебнике А.В. Засова и В.Г. Сурдина [4, стр. 83]: «Чтобы ... научиться вычислять положение планет среди звёзд, была создана математическая теория на основе простой механической модели: планета равномерно обращается по малой окружности — эпициклу,

центр которой движется вокруг Земли по большой окружности — деференту. Складывая два равномерных круговых движения, получаем, с точки зрения земного наблюдателя, петлеобразную траекторию планеты. Простая и красивая идея!».

Кроме того, именно слова «с точки зрения земного наблюдателя» примиряют битвы систем Коперника и Птолемея в 16–17 веках: современный школьник скажет, что все зависит от выбора системы отсчета: если она связана жестко с Землей, то и Солнце, и планеты движутся вокруг Земли — что и видно на небесной сфере.

2. ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ КОПЕРНИКА

2.1. Описание модели

В гелиоцентрической системе попятное движение объясняется разностью орбитальных скоростей планет: Земля, двигаясь по внутренней (более «быстрой») орбите, как бы «обгоняет» внешнюю планету; в этот момент проекция планеты на небесную сферу начинает смещаться в обратную сторону (рис. 2). Отметим, забегая вперед, что по планетарной модели Птолемея петли более чем наглядны (рис. 3).

Итак, уникальной особенностью движения планет по небосводу является попятное движение с его петлями и зигзагами. При этом в рамках простейшей модели планетной системы Коперника положение точек и период стояния определяются довольно просто; эта именно простейшая модель (в том смысле, что далее следуют последующие её усложнения) — круговая плоская (эклиптическая) гелиоцентрическая (т. е. орбиты — круговые с центрами в Солнце, лежащие в плоскости эклиптики; движение планет — равномерное).

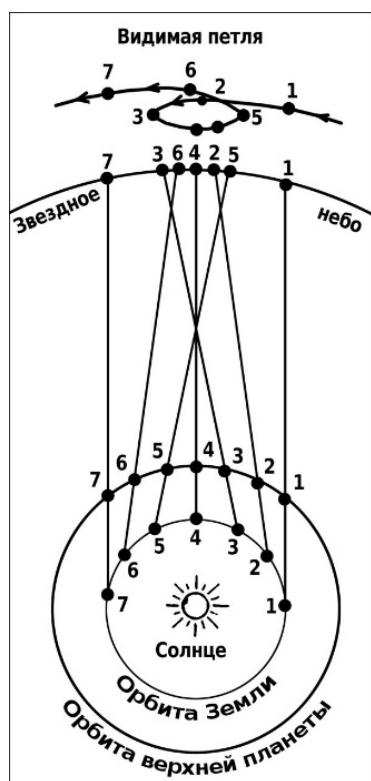


Рис. 2. Попытное движение верхних планет

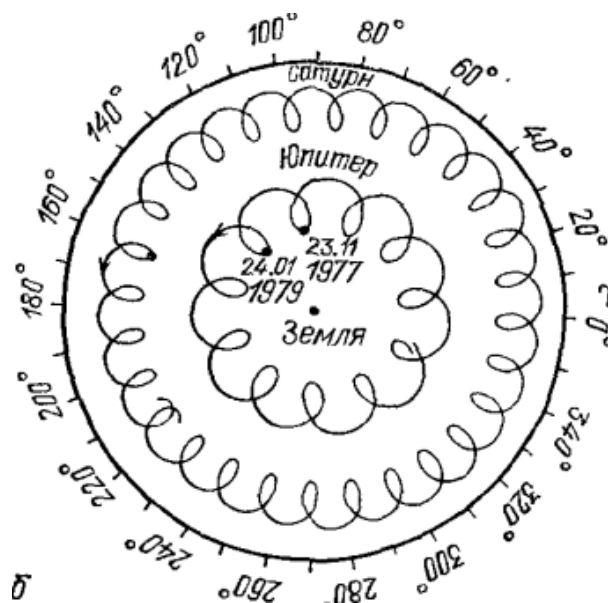


Рис. 3. Движение Юпитера и Сатурна относительно Земли: положение Сатурна отмечено на 01.03.1979 г. [5, рис. 27]

Далее рассматриваем именно плоскую круговую модель; положения планет определяем как гелиоцентрической долготой L , так и геоцентрической долготой λ . Углы L и λ в астрономии отсчитываются от точки весеннего равноденствия Υ (рис. 4; в круговой модели в силу симметрии окружностей эти углы можно отсчитывать и от любого направления). Движение планет — против часовой стрелки (как оно и есть, если на Солнечную систему смотреть со стороны Северного полюса мира).

Попытное движение тесно связано с двумя линейными конфигурациями планет, когда Земля, планета и Солнце расположены на одной прямой:

поясним — как и принято, различаем нижние планеты (это Меркурий и Венера) и верхние; синонимы — внутренние и внешние планеты. В одной из линейных конфигураций планета и Земля находятся по одну сторону от Солнца — для внутренних планет это нижнее соединение, для внешних — противостояние. В другой конфигурации планета и Земля — по разные стороны от Солнца: для внутренних планет это верхнее соединение, для внешних — соединение; рис. 5).

При противостоянии внешняя планета находится за Землей, т. е. геоцентрические долготы λ планеты и Солнца отличаются на 180° ; при нижнем соединении внутренняя планета — между Солнцем и Землей (т. е. планета и Солнце имеют одинаковую долготу λ).

Попытное движение имеет место для внешних планет вблизи момента противостояния, для внутренних — вблизи нижнего соединения. При этом в круговой модели центр дуги попытного движения находится именно в точке противостояния или нижнего соединения.

Далее используем такие обозначения:

R_p , R_Z — радиусы орбит планеты и Земли;

$a = R_p/R_Z$ — относительный радиус орбиты планеты, численно равный радиусу R_p в а. е.;

T_p , T_Z — орбитальные периоды планеты и Земли;

$\tau = T_p/T_Z$ — относительный орбитальный период, численно равный орбитальному периоду T_p в земных годах;

n_p , n_Z — угловые гелиоцентрические скорости планеты и Земли (т. е. орбитальные угловые скорости).

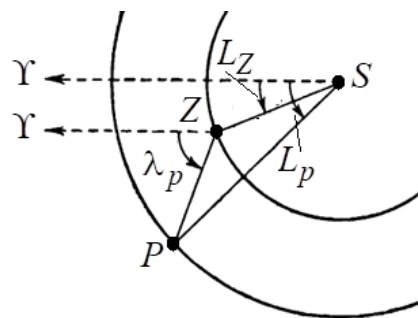


Рис. 4. Гелиоцентрические и геоцентрические долготы планеты и Земли [1, рис. 16]



Рис. 5. Планетные конфигурации [1, рис. 185]

В круговой модели величина n полагается постоянной:

$$n_p = \frac{360}{T_p}; \quad n_Z = \frac{360}{T_Z} \quad (\text{в град}); \quad n_p = \frac{2\pi}{T_p}; \quad n_Z = \frac{2\pi}{T_Z} \quad (\text{в рад}) \quad (1)$$

(в формулах ниже все углы — в рад и n — в рад/с, если это не оговорено особо), соответственно относительная угловая скорость планеты

$$\bar{n}_p = \frac{n_p}{n_Z} = \frac{1}{\tau}. \quad (2)$$

Гелиоцентрическая долгота L указывается в интервале от 0° до 360° . Вместе с тем при анализе движения планеты долготную координату важно связывать и с пройденным ею угловым путем. Так, пусть L_{p0} — долгота планеты в момент $t = 0$, $\Delta L_p = n_p t$ — изменение долготы (т. е. её угловое перемещение по долготе за время t), тогда величина $L_p^* = L_{p0} + \Delta L_p = L_{p0} + n_p t$ — угловая координата, которую можно назвать «полной» долготой (в отличие от «обычной» долготы); L_p^* принимает любые действительные значения при различных значениях t — и сколь угодно большие, и отрицательные («полная» долгота L^* и долгота L аналогичны полным углам и главным углам — «аркам» — в тригонометрии).

Вследствие симметрии окружностей ясно, что по круговой модели параметры попятного движения должны не зависеть от положения на орбите точки противостояния (или нижнего соединения); в частности — точки стояния должны быть расположены симметрично относительно центра дуги попятного движения. Формулы попятного движения по круговой модели должны это, естественно, отражать — как будет видно далее, так оно и есть.

Отсчет времени удобно начинать с момента некоторого противостояния с долготой $L = L_0$, при этом $t = 0$, $L_Z = L_p = \lambda_p = L_0$). На рис. 6 представлены положения Земли Z_0 и внешней планеты P_0 при данном противостоянии, а также положения Z и P в некоторый момент времени.

Через время t планеты переместятся на дуги $\Delta L_Z = n_Z t$ и $\Delta L_p = n_p t = \frac{n_p}{n_Z} n_Z t = \frac{\Delta L_Z}{\tau}$, и полные долготы L_Z^* и L_p^* будут составлять

$$L_Z^* = L_0 + \Delta L_Z; \quad L_p^* = L_0 + \Delta L_p = L_0 + \frac{\Delta L_Z}{\tau}. \quad (3)$$

Очевидно при этом, что производные по времени от L_Z^* и L_p^* — это орбитальные угловые скорости n_Z и n_p .

Итак, изменение долготы ΔL_Z Земли может выступать в качестве параметра времени. Полный

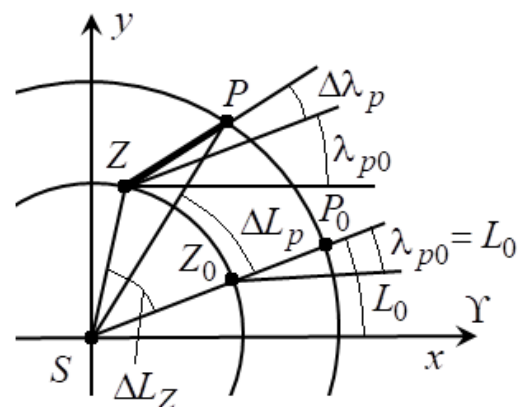


Рис. 6. Положения Земли и внешней планеты при противостоянии и в некоторый момент времени

гелиоцентрический угол φ^* между Землей и планетой в произвольный момент ΔL_Z составляет

$$\varphi^* = L_Z^* - L_p^* = \Delta L_Z - \frac{\Delta L_Z}{\tau} = \frac{\tau-1}{\tau} \Delta L_Z. \quad (4)$$

При этом по 3-му закону Кеплера

$$\frac{T_p^2}{T_Z^2} = \frac{R_p^3}{R_Z^3}; \quad \tau = a\sqrt{a}, \quad (5)$$

т. е. с учетом этого закона $\varphi^* = \frac{a\sqrt{a}-1}{a\sqrt{a}} \Delta L_Z. \quad (6)$

Угол φ^* может принимать любое значение. Соответствующий ему геометрический угол $\varphi \in [0, 180^\circ]$ называется гелиоцентрическим углом между Землей и планетой.

2.2. Конфигурации планет и синодическое уравнение

При противостоянии (для верхних планет) или нижнем соединении (для нижних планет) Земля и планета — по одну сторону от Солнца. Условие этого —

$$\varphi = 0, \quad \text{т. е.} \quad \varphi^* = 360^\circ k, \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

При соединении (для внутренних планет) или верхнем соединении (для внешних планет) Земля и планета — по разные стороны от Солнца, и условие этого —

$$\varphi = 180^\circ, \quad \text{т. е.} \quad \varphi^* = 180^\circ(2k+1); \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Таким образом, все эти 4 конфигурации (две — для верхних планет и две — для нижних), когда Солнце, Земля и планета находятся на одной прямой, объединяются одним уравнением

$$\sin \varphi^* = 0, \quad \text{т. е.} \quad \sin \left(\frac{\tau-1}{\tau} \Delta L_Z \right) = 0, \quad (9)$$

и это тот случай, когда школьное простейшее тригонометрическое уравнение имеет важный и ясный практический смысл.

Для соседних противостояний и нижних соединений $\varphi^* = \varphi_{\text{пр}}^* = 360^\circ$, т. е. из (7) и (8) при этом получаем: $\Delta L_{Z\text{пр}} = \frac{\tau}{\tau-1} 360$, откуда следует для синодического периода T_S (т. е. времени между соседними противостояниями или нижними соединениями):

$$T_S = \frac{\Delta L_{Z\text{пр}}}{360} T_Z, \quad \text{откуда} \quad T_S = \frac{T_Z T_p}{|T_Z - T_p|} = \frac{\tau}{|\tau-1|} T_Z \quad (10)$$

(здесь применен модуль, чтобы не различать верхние / нижние планеты и противостояния / нижние соединения).

Это самый быстрый вывод уравнения для синодического периода: угловой путь планеты с угловой скоростью n за время T составляет nT , и для соседних противостояний и нижних соединений получаем в град: $|n_p T_S - n_Z T_S| = 360$; в рад: $|n_p T_S - n_Z T_S| = 2\pi$, то есть

$$\left| \frac{1}{T_p} - \frac{1}{T_Z} \right| = \frac{1}{T_S}, \text{ откуда } T_S = \frac{T_p}{\left| \frac{1}{T_p} - \frac{1}{T_Z} \right|} = \frac{\tau}{|\tau - 1|} T_Z. \quad (11)$$

Синодический период T_S планеты определяется по результатам наблюдений. Соответственно при известных значениях T_S и орбитального периода T_Z Земли могут быть найдены орбитальный период планеты T_p и его относительная величина $\tau = T_p / T_Z$:

$$T_p = \frac{T_S T_Z}{|T_S - T_Z|}; \quad \tau = \frac{T_p}{T_Z} = \frac{T_S}{|T_S - T_Z|}. \quad (12)$$

2.3. Видимые долгота и угловая скорость планеты

Видимая долгота планеты — это её геоцентрическая долгота λ_p (рис. 6). Принимаем, что $\lambda_p \in (-180^\circ; 180^\circ]$.

Если $\Delta x, \Delta y$ — координаты радиус-вектора $\overline{ZP}$ планеты в системе координат Sxy , то

$$\Delta x = R_p \cos L_p^* - R_Z \cos L_Z^*; \quad \Delta y = R_p \sin L_p^* - R_Z \sin L_Z^*. \quad (13)$$

При этом для долготы λ_p получаем с учетом (3):

$$\operatorname{tg} \lambda_p = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{R_p \sin L_p^* - R_Z \sin L_Z^*}{R_p \cos L_p^* - R_Z \cos L_Z^*} = \frac{a \sin \left(L_0 + \frac{\Delta L_Z}{\tau} \right) - \sin (L_0 + \Delta L_Z)}{a \cos \left(L_0 + \frac{\Delta L_Z}{\tau} \right) - \cos (L_0 + \Delta L_Z)}, \quad (14)$$

т. е. $\lambda_p = \operatorname{arctg}(\Delta y / \Delta x) + 180^\circ k$, где значение k_0 (0, 1 или -1) зависит от четверти, в которой находится угол λ_p , и принятого интервала его изменения.

Модуль R_{Zp} геоцентрического радиус-вектора $\overline{ZP}$ планеты (т. е. расстояние между Землей и планетой) может быть найден по формуле $R_{Zp} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ или непосредственно из

ΔSZP по теореме косинусов; получаем для R_{Zp} и относительной величины $\rho = R_{Zp} / R_Z$:

$$R_{Zp} = \sqrt{R_p^2 + R_Z^2 - 2R_p R_Z \cos \varphi^*}; \quad \rho = \sqrt{a^2 - 2a \cos \varphi^* + 1}, \quad (15)$$

где по (4) и (6) $\varphi^* = \frac{\tau - 1}{\tau} \Delta L_Z = \frac{a\sqrt{a} - 1}{a\sqrt{a}} \Delta L_Z$.

В точках стояния долгота λ_p , очевидно, экстремальна (в одной точке — положительна и максимальна, в другой — отрицательна и минимальна), т. е. величина $\lambda_{ст}$ долготы λ_p в этих точках находится стандартным экстремальным методом — дифференцированием λ_p по времени и приравниванием производной нулю.

Производная от λ_p по времени — это геоцентрическая угловая скорость планеты (т. е. видимая угловая скорость — та скорость, с которой планета перемещается относительно неподвижных звезд на земном небосводе; обозначим ее m_p). Соответственно из (14) получаем:

$$m_p = \frac{d\lambda_p}{dt} = \frac{n_p R_p^2 + n_Z R_Z^2 - (n_p + n_Z) R_p R_Z \cos \varphi^*}{R_{Zp}}, \quad (16)$$

где R_{Zp} — по (15), φ^* — по (4) и (6). В относительных величинах

$$m_p = \frac{a^2 + \tau - a(\tau + 1) \cos \varphi^*}{\tau \rho^2} n_Z = \frac{a + \sqrt{a} - (a\sqrt{a} + 1) \cos \varphi^*}{\rho^2 \sqrt{a}} n_Z. \quad (17)$$

В уравнения (16)–(17) не входит начальная долгота L_0 противостояния (нижнего соединения), от которого отсчитываем перемещения планет, — так и должно быть вследствие симметрии круговых орбит.

3. ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ ПТОЛЕМЕЯ

Теперь проанализируем попятное движение в рамках простейшей модели Птолемея. По этой модели Земля — в центре мира, планеты вращаются по окружностям, называемым эпициклами, центры которых, в свою очередь, вращаются по окружностям, называемым дифферентами. Все движения — равномерные и против часовой стрелки (рис. 7–8).

Модель Птолемея иллюстрирует попятные движения планет гораздо более наглядно, нежели чем модель Коперника, — это хорошо видно по рисункам 3 и 9: в то время как в модели Коперника всё не так уж и очевидно (рис. 2), в модели Птолемея ничего не надо пояснять, петли наглядны.

Рассмотрим движение одной внешней планеты от некоторого противостояния с долготой L_0 , обозначим радиусы её дифферента и эпицикла через R_d, R_z и определим в декартовой системе координат Oxy геоцентрическую долготу планеты (углы указаны на рис. 10):

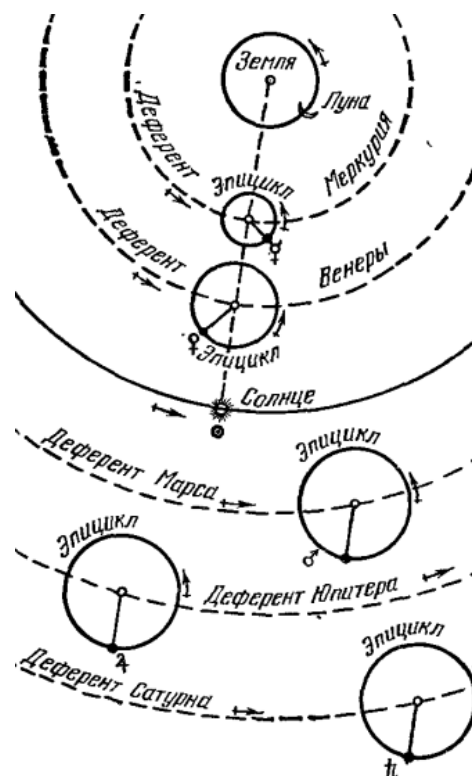


Рис. 7. Система мира по Птолемею [5, с. 64]

$$\operatorname{tg} \lambda_p = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{R_d \sin(L_0 + \Delta L_d) - R_3 \sin(L_0 + \Delta L_3)}{R_d \cos(L_0 + \Delta L_d) - R_3 \cos(L_0 + \Delta L_3)} = \frac{a_1 \sin\left(L_0 + \frac{\Delta L_3}{\tau_1}\right) - \sin(L_0 + \Delta L_3)}{a_1 \cos\left(L_0 + \frac{\Delta L_3}{\tau_1}\right) - \cos(L_0 + \Delta L_3)},$$

где обозначено $a_1 = R_d/R_3$, $\tau_1 = n_d/n_3$.

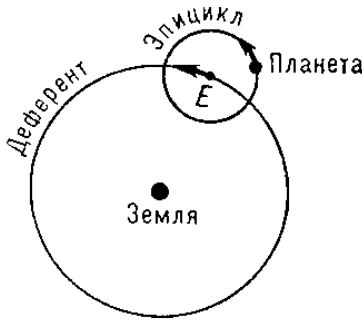


Рис. 8. Движение планеты по Птолемею

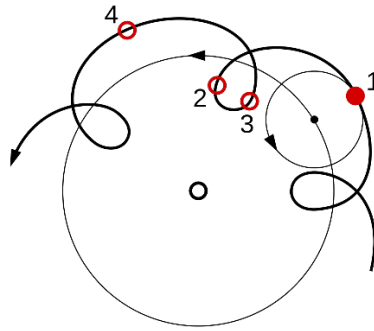


Рис. 9. Прямое движение планеты (от точки 1 к 2 и от 3 к 4) и обратное (от 2 к 3)

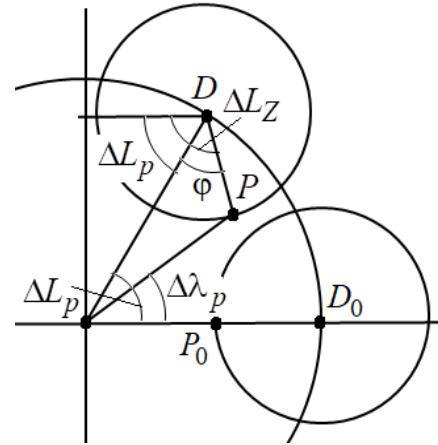


Рис. 10. К расчету движения по модели Птолемея

Видим очень важное обстоятельство: если $a_1 = a$, $\tau_1 = \tau$, где величины a и τ — из модели Коперника ($a = R_p/R_Z$ и $\tau = T_p/T_Z$), то геоцентрические долготы планеты по обеим моделям совпадают (частный случай — радиус дифферента равен радиусу орбиты планеты, его центр вращается с угловой скоростью планеты, т. е. делает один оборот за один орбитальный период планеты; радиус эпицикла равен радиусу орбиты Земли, его центр вращается с угловой скоростью Земли и делает один оборот за один год). Таким образом, с математической точки зрения применительно к геоцентрической долготы планеты (а именно это и наблюдается) модели одинаковы. Соответственно по модели Птолемея мы обязаны получать те же формулы для попятного движения, что и ранее.

4. ЭЛОНГАЦИЯ ПЛАНЕТЫ

Важная величина — элонгация θ планеты, т. е. угол при Земле между направлениями к планете и к Солнцу (θ — геометрический угол, т. е. $0 \leq \theta \leq 180^\circ$). Элонгация связана с гелиоцентрическим углом φ между Землей и планетой; в частности, элонгация может быть выражена через тангенс φ — но при этом следует учитывать взаимное положение планеты и Земли: например, для внешних планет рисунок 11, а соответствует случаю

$$R_p \cos \varphi > R_Z, \text{ т. е. } \cos \varphi > \frac{1}{a}; \quad (18)$$

при этом угол θ тупой и элонгация θ составляет

$$\theta = 180^\circ - \gamma, \quad (19)$$

где $\gamma = \arctg \frac{R_p \sin \varphi}{R_p \cos \varphi - R_Z} = \arctg \frac{a \sin \varphi}{a \cos \varphi - 1}$ и φ — по (4) и (6): $\varphi = \frac{\tau-1}{\tau} \Delta L_Z = \frac{a\sqrt{a}-1}{a\sqrt{a}} \Delta L_Z$.

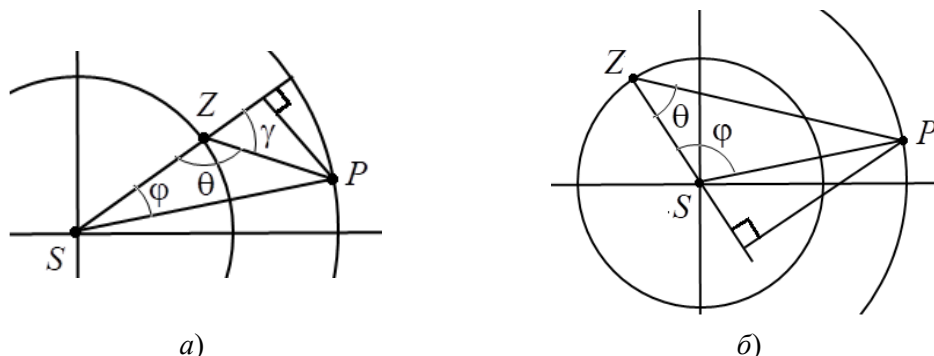


Рис. 11. К определению элонгации внешней планеты

Отметим, что условие (18) $\cos \varphi > 1/a$ вместе с уравнением (6) для φ дает трансцендентное неравенство, решаемое численно относительно ΔL_Z :

$$\frac{a\sqrt{a}-1}{a\sqrt{a}} \Delta L_Z < \arccos \frac{1}{a}; \quad (20)$$

к примеру, для Юпитера при $a = 5,2043$ получаем $\Delta L_Z < 86,181^\circ$.

В случае же рисунка 11, б для внешних планет

$$R_p \cos \varphi < R_Z, \text{ т. е. } \cos \varphi < \frac{1}{a}, \quad (21)$$

$$\text{при этом элонгация } \theta = \arctg \frac{a \sin \varphi}{1 - a \cos \varphi}. \quad (22)$$

При $\cos \varphi < \frac{1}{a}$ имеем, очевидно, $\theta = 90^\circ$.

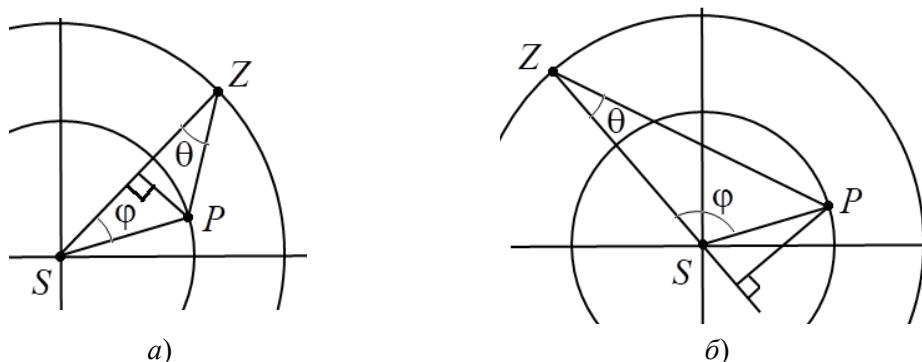


Рис. 12. К определению элонгации внутренней планеты

Для внутренних планет для всех их положений элонгация определяется по (22) (рис. 12). Универсальной же, т. е. работающей для всех положений планет, является формула

$$\theta = \arccos \frac{1 - a \cos \varphi}{\rho}, \quad (23)$$

где φ — по (4) и (6), ρ — расстояние между Землей и планетой по (15): $\rho = \sqrt{a^2 - 2a \cos \varphi + 1}$.

5. ФОРМУЛЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗИ ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКОЙ И ГЕОЦЕНТРИЧЕСКОЙ ДОЛГОТ ПЛАНЕТЫ

Гелиоцентрическая L_p и геоцентрическая λ_p долготы планеты геометрически связаны.

5.1. Внешние планеты

По модели Коперника получаем для внешних планет и положений, показанных на рис. 13, а:

$$\Delta\lambda_p = \Delta L_Z - \arctg \frac{a \sin \varphi}{a \cos \varphi - 1} \quad (24)$$

(в соответствии с рис. 11, а и 13, а $\Delta\lambda_p = \Delta L_Z - \gamma$, где $\tg \gamma = \frac{R_p \sin \varphi}{R_p \cos \varphi - R_Z} = \frac{a \sin \varphi}{a \cos \varphi - 1}$).

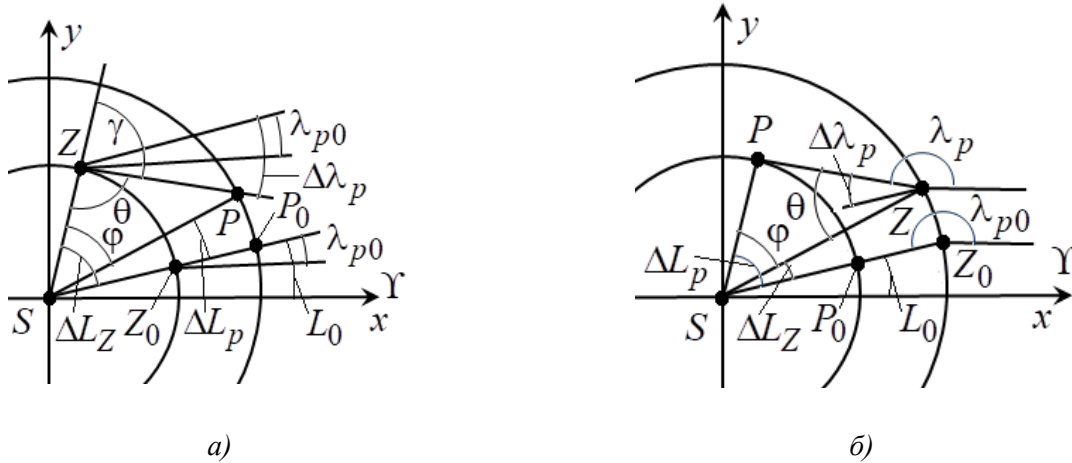


Рис. 13. К геометрической связи гелиоцентрической и геоцентрической долгот внешней (рис. а) и внутренней (б) планеты

Кроме того, видимая долгота $\Delta\lambda_p$ связана с элонгацией планеты: для положения на рис. 11, а

$$\Delta\lambda_p = \theta + \Delta L_Z - 180^\circ, \text{ где } \theta = 180^\circ - \gamma. \quad (25)$$

Определим теперь долготу $\Delta\lambda_p$ для внешних планет по простейшей модели Птолемея: по теореме синусов из ΔZPD имеем (рис. 10):

$$\frac{R_p}{\sin(\varphi + \Delta L_p - \Delta\lambda_p)} = \frac{R_Z}{\sin(\Delta L_p - \Delta\lambda_p)}, \text{ откуда } \tg(\Delta L_p - \Delta\lambda_p) = \frac{\sin \varphi}{a - \cos \varphi}.$$

Получаем:

$$\Delta\lambda_p = \frac{\Delta L_Z}{\tau} - \arctg \frac{\sin \varphi}{a - \cos \varphi}. \quad (26)$$

5.2. Внутренние планеты

По модели Коперника для внутренних планет и положений, показанных на рис. 13, б,

$$\Delta\lambda_p = \frac{\Delta L_Z}{\tau} - \arctg \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - a} \quad (27)$$

(в соответствии с рис. 11, б и 13, б $\Delta\lambda_p = \Delta L_p - \gamma$, где $\operatorname{tg} \gamma = \frac{R_Z \sin \varphi}{R_Z \cos \varphi - R_p} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - a}$).

По модели Птолемея по теореме синусов из ΔZPD имеем (рис. 10):

$$\frac{R_p}{\sin(\Delta L_Z - \Delta\lambda_p)} = \frac{R_Z}{\sin(\varphi + \Delta L_Z - \Delta\lambda_p)}, \text{ откуда } \operatorname{tg}(\Delta L_Z - \Delta\lambda_p) = \frac{a \sin \varphi}{1 - a \cos \varphi},$$

то есть

$$\Delta\lambda_p = \Delta L_Z - \arctg \frac{a \sin \varphi}{1 - a \cos \varphi}. \quad (28)$$

6. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ДВИЖЕНИЯ ПЛАНЕТ

6.1. Экстремальные значения видимой угловой скорости планеты

Определим экстремумы m_p : так как $\frac{dm_p}{dt} = \frac{A}{\rho^4} \sin \varphi^*$, где $A = \text{const}$, то максимумы и

минимумы m_p приходятся на углы с $\cos \varphi^* = \pm 1$.

При $\cos \varphi^* = 1$, т. е. $\varphi^* = 0 + 360^\circ k$ ($k \in \mathbb{Z}$) имеем минимум m_p : из (16) получаем:

$$m_p = m_{p\min} = \frac{n_p R_p - n_Z R_Z}{R_p - R_Z} = \frac{a - \tau}{a - 1} \cdot \frac{n_Z}{\tau} = \frac{a - \tau}{a - 1} n_p. \quad (29)$$

С учетом 3-го закона Кеплера

$$m_{p\min} = -\frac{n_Z}{a + \sqrt{a}}. \quad (30)$$

Угол $\varphi^* = 0 + 360^\circ k$ — противостояние (нижнее соединение); при этом $m_p = m_{\min} < 0$ — это и есть попятное движение; итак, в противостоянии (нижнем соединении) планета «пятится» и её видимая угловая скорость m_p минимальна.

При $\cos \varphi^* = -1$, $\varphi^* = 180^\circ + 360^\circ k$ из (16) следует:

$$m_p = m_{p\max} = \frac{n_p R_p + n_Z R_Z}{R_p + R_Z} = \frac{a + \tau}{a + 1} \cdot \frac{n_Z}{\tau} = \frac{a + \tau}{a + 1} n_p; \quad (31)$$

с применением 3-го закона Кеплера

$$m_{p\max} = \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}(a+1)} n_Z. \quad (32)$$

Угол $\varphi^* = 180^\circ + 360^\circ k$ — это соединение (верхнее соединение); при этом у планеты прямое движение и максимальна видимая угловая скорость m_p .

Формулы (29)–(32) могут быть выведены и элементарным методом: орбитальные скорости планеты и Земли $v_p = n_p R_p$, $v_Z = n_Z R_Z$; в точке противостояния (нижнего соединения) скорости направлены в одну сторону, т. е. за малое время dt разность путей, пройденных планетой и Землей, составляет $dl = (n_p R_p - n_Z R_Z) dt$, разность угловых путей $d\lambda_p = dl / (R_p - R_Z)$, т. е. получаем формулу (29), т. к. $m_p = d\lambda_p / dt$.

В точке соединения (верхнего соединения) $dl = (n_p R_p + n_Z R_Z) dt$; $d\lambda_p = dl / (R_p + R_Z)$, т. е. получаем формулу (31).

Экстремальные значения $m_{p\min}$ и $m_{p\max}$ видимой угловой скорости планеты важны потому в частности, что они могут быть определены наблюдениями и далее по ним может быть определен относительный радиус a орбиты планеты: по формулам (30) и (32) имеем с учетом того, что $n_p = n_Z / \tau$:

$$(a-1)m_{p\min} = an_p - n_Z; \quad (a+1)m_{p\max} = an_p + n_Z, \quad (33)$$

и для a получаем такую изящную формулу:

$$a = \frac{m_{p\max} - m_{p\min}}{2n_p - m_{p\max} - m_{p\min}}. \quad (34)$$

6.2. Определение параметров движения планет по данным наблюдений

Основные параметры движения планеты по простейшей круговой модели Коперника — радиус её орбиты R_p и орбитальный период T_p . Рассмотрим, как по данным наблюдений и приведенным выше формулам определяются относительные радиус $a = R_p / R_Z$ и период $\tau = T_p / T_Z$ орбиты планеты (для определенности — внешней планеты), орбитальные угловые скорости n_p и n_Z . Имеем 4 неизвестных, для их нахождения требуются 4 опытных данных; таковыми могут быть, например, устанавливаемые наблюдениями орбитальный период T_Z Земли, синодический период T_S планеты и видимые угловые скорости планеты: минимальная $m_{p\min}$ в противостоянии и максимальная $m_{p\max}$ в соединении.

Первым делом по (12) определяются орбитальный период T_p планеты и величина τ :

$$T_p = \frac{T_S T_Z}{T_S - T_Z}; \quad \tau = \frac{T_S}{T_S - T_Z}, \text{ далее вычисляются угловые скорости } n_p = \frac{360}{T_p}; \quad n_Z = \frac{360}{T_Z}.$$

Наконец, по (34) находится относительный радиус a .

Приведем пример для Юпитера: пусть наблюдения отвечают данным, приведенным в Википедии (статьи «Юпитер», «Земля» со ссылками на сайт *NASA*): $T_Z = 365,256$ сут, $T_S = 398,88$ сут, а также значениям m_p , соответствующим формулам (30) и (32): $m_{p\min} = -0,132^\circ \text{ сут}^{-1}$; $m_{p\max} = 0,229^\circ \text{ сут}^{-1}$.

Вычисляем:

$$T_U = 4333,016 \text{ сут}; \tau = 11,863; n_p = 0,083^\circ \text{ сут}^{-1}; n_Z = 0,986^\circ \text{ сут}^{-1}; a = 5,219 \text{ а. е.}$$

По данным *WP* $T_U = 4332,589$ сут; $\tau = 11,862$; $a = 5,204267$ а. е. Как видно, расхождение этих результатов с вычисленными не превышает 0,3 %.

6.3. Движение внутренних планет вблизи Солнца

Вблизи Солнца и нижнего соединения внутренние планеты движутся попятно, сначала сближаясь с Солнцем, а затем от него удаляясь. При этом возможны прохождения планеты по диску Солнца, когда планета выглядит с Земли как маленькое чёрное пятно, перемещающееся по Солнцу. Продолжительность прохождения обычно около 5–7 часов и для Меркурия, и для Солнца.

В круговых плоских моделях прохождение случается всякий раз в районе нижнего соединения, в реальности же из-за наклона орбит планет к плоскости эклиптики для Меркурия это довольно редкое астрономическое явление (раз в несколько лет), а для Венеры — одно из самых редких предсказуемых астрономических явлений: каждые 243 года повторяются 4 прохождения: два в декабре (с разницей в 8 лет), затем промежуток в 121,5 года, ещё два в июне (опять с разницей 8 лет), далее промежуток в 105,5 года [1, с. 262; 12, с. 244–253].

Видимая угловая скорость годового движения Солнца среди звезд равна орбитальной угловой скорости n_Z Земли и направлена против суточного движения звезд.

Итак, вблизи Солнца и нижнего соединения внутренние планеты движутся попятно и навстречу видимому годовичному движению Солнца, т. е. видимая угловая скорость планеты при ее прохождении по диску Солнца

$$m_{\text{прох}} = |m_{p\min}| + n_Z = -\frac{a-\tau}{a-1}n_p + n_Z = \frac{1-\tau}{1-a} \cdot \frac{a}{\tau}n_Z = \frac{a+\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}}n_Z. \quad (35)$$

Продолжительность центрального прохождения (т. е. по диаметру диска) при угловом диаметре Солнца D

$$t_{\text{прох}} = \frac{D}{m_{\text{прох}}} = \frac{a+\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}+1} \cdot \frac{D}{n_Z}. \quad (36)$$

Сделаем расчет для Венеры, принимая, что радиус её орбиты $a_V = 0,723$ а. е., диаметр Солнца $32'$, орбитальная скорость Земли $n_Z = 0,986^\circ \text{ сут}^{-1}$: по (35)–(36) получаем

$$m_{\text{прох}} = 1^\circ,612 \text{ сут}^{-1} = 4',030 \text{ час}^{-1} = 241'',811 \text{ час}^{-1};$$

$$t_{\text{прох}} = \frac{32'}{4,030'} \text{ час} = 7^{\text{ч}}56,41^{\text{м}}.$$

Вблизи верхнего соединения внутренние планеты движутся в ту же сторону (с запада на восток), что и Солнце. Таким образом, видимая угловая скорость углового удаления внутренней планеты от Солнца вблизи момента верхнего соединения составляет

$$m_{\text{уд}} = m_{p\text{max}} - n_Z = \frac{a+\tau}{a+1} \cdot \frac{n_Z}{\tau} - n_Z = \frac{1-\tau}{a+1} \cdot \frac{a}{\tau} n_Z = \frac{1-a\sqrt{a}}{\sqrt{a}(a+1)} n_Z. \quad (37)$$

Считаем для Венеры: $m_{\text{уд}} = 15'33,0'' \text{ сут}^{-1}$.

6.4. Угловые конфигурации внутренних планет

Видимое движение внутренних планет — это движение туда-обратно (как маятник) вокруг Солнца. Наибольшие видимые (геоцентрические) угловые удаления внутренней планеты от Солнца — это её угловые конфигурации, называемые западной и восточной элонгациями (см. рис. 5).

Элонгация θ планеты по (23) — $\theta = \arccos \frac{1-a \cos \varphi}{\rho}$, где φ — по (4) и (6), ρ — по (15):

$$\varphi = \frac{\tau-1}{\tau} \Delta L_Z = \frac{a\sqrt{a}-1}{a\sqrt{a}} \Delta L_Z; \quad \rho = \sqrt{a^2 - 2a \cos \varphi + 1}.$$

Экстремальные значения элонгации θ находим, дифференцируя θ по φ :

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = 0 \Rightarrow (a - \cos \varphi) \sin \varphi = 0.$$

Решение $\sin \varphi = 0$ соответствует нижнему соединению, решение же $\cos \varphi = a$ существует при $a < 1$, т. е. только для внутренних планет (для внешних планет, у которых $a > 1$, решения нет). Это решение дает максимальные угловые гелиоцентрическое φ_{max} и видимое (геоцентрическое) θ_{max} удаления внутренней планеты от Солнца (т. е. наибольшие западную и восточную элонгации) и соответствующие значения ΔL_Z :

$$\varphi_{\text{max}} = \arccos a; \quad \Delta L_Z = \pm \frac{\tau}{1-\tau} \arccos a; \quad \theta_{\text{max}} = \arccos \sqrt{1-a^2}. \quad (38)$$

Сделаем расчет для Меркурия ($a_{\text{Mer}} = 0,387$ а. е.) и Венеры ($a_V = 0,723$ а. е.):

$$\theta_{\text{max Mer}} = 22,77^\circ; \quad \theta_{\text{max V}} = 46,30^\circ.$$

По справочнику П. Г. Куликовского [1, с. 262] наибольшая элонгация Меркурия около 28° , Венеры около 48° ; отклонение расчетного и указанного в справочнике значений для Меркурия — вследствие значительного эксцентриситета его орбиты. Из-за этого же угол его наибольшей элонгации зависит от взаимного расположения его орбиты и Земли в момент элонгации и меняется от $17^\circ 30'$ до $27^\circ 45'$ (значение $\theta_{\text{max Mer}} = 22,77^\circ$, как и должно быть, — средняя величина этого интервала).

6.5. Угловые конфигурации внешних планет

Угловые конфигурации внешних планет — это западная и восточная квадратуры. И есть параметр движения планеты, достигающий в квадратурах экстремального значения, — это линейная скорость Δv приближения планеты к Земле (в западной квадратуре) или удаления от неё (в восточной). Имеем (рис. 14):

$$\Delta v = v_Z \cos \alpha_1 - v_p \cos \alpha_2.$$

Линейные скорости планет: $v_Z = \frac{2\pi R_Z}{T_Z}$; $v_p = \frac{2\pi R_p}{T_p}$, углы:

$\alpha_1 = \theta - 90^\circ$; $\alpha_2 = \varphi + \theta - 90^\circ$, при этом получаем:

$$\Delta v = \frac{2\pi R_Z}{T_Z} \left[\sin \theta - \frac{a}{\tau} \sin(\theta + \varphi) \right].$$

Поскольку по (23) элонгация планеты $\cos \theta = \frac{1 - a \cos \varphi}{\rho}$, то $\sin \theta = \frac{a \sin \varphi}{\rho}$ и

$$\Delta v = \frac{2\pi R_Z}{T_Z} \cdot \frac{\tau - 1}{\tau} \cdot \frac{a}{\rho} \sin \varphi.$$

По теореме синусов из ΔSZP находим: $\frac{R_p}{\sin \theta} = \frac{ZP}{\sin \varphi}$, или $\frac{a \sin \varphi}{\rho} = \sin \theta$, соответ-

ственно

$$\Delta v = \frac{2\pi R_Z}{T_Z} \cdot \frac{\tau - 1}{\tau} \sin \theta.$$

Из последнего выражения видно, что линейная скорость Δv приближения планеты к Земле или удаления от неё достигает максимального значения именно при $\theta = 90^\circ$, т. е. в квадратурах.

6.6. Попятные движения по простейшей модели Коперника

6.6.1. Определение параметров попятного движения экстремальным методом

В точках стояния планеты $m_p = 0$, и из (16) получаем, что в этих точках гелиоцентрические углы между Землей и планетой составляют (в град)

$$\varphi_{\text{ст}}^* = \pm \varphi_{\text{ст}} + 2\pi k; \quad k \in Z \quad (\text{в рад}); \quad \varphi_{\text{ст}}^* = \pm \varphi_{\text{ст}} + 360^\circ k \quad (\text{в град}), \quad (39)$$

$$\text{где } \varphi_{\text{ст}} = \arccos \frac{a^2 + \tau}{a(\tau + 1)} \quad (\text{в рад}); \quad \varphi_{\text{ст}} = \frac{180}{\pi} \arccos \frac{a^2 + \tau}{a(\tau + 1)} \quad (\text{в град}). \quad (40)$$

Эти же формулы с угловыми скоростями планет:

$$\varphi_{\text{ст}} = \arccos \frac{a^2 + n_Z/n_p}{a(n_Z/n_p + 1)} = \arccos \frac{n_p a^2 + n_Z}{(n_p + n_Z)a}. \quad (41)$$

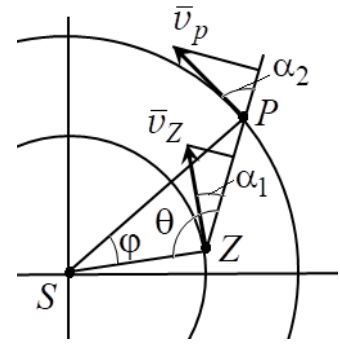


Рис. 14. К расчету скорости Δv

Формулы (40)–(41) — общие; при применении 3-го закона Кеплера получаем из них:

$$\varphi_{\text{ст}} = \arccos \frac{\sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} \quad (\text{в рад}); \quad \varphi_{\text{ст}} = \frac{180}{\pi} \arccos \frac{\sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1}. \quad (42)$$

Величина $\varphi_{\text{ст}}$ — это гелиоцентрический угол между Землей и планетой в момент стояния. Как видно из (39), величины $\varphi_{\text{ст}}$ и $\varphi_{\text{ст}}^*$ не зависят от того, где именно на орбите располагается начальная точка противостояния, — как и должно быть в силу симметрии при равномерном круговом движении (т. к. при этом все точки противостояния равноправны).

Рассмотрим некоторый момент противостояния (нижнего соединения) с гелиоцентрической долготой L_0 и положениями Земли и планеты Z_0, P_0 (рис. 13). Положения Земли и планеты, соответствующие моментам стояния, — точки Z_1, Z_2 и P_1, P_2 с долготами L_{Z1}, L_{Z2} и L_{P1}, L_{P2} ; при этом $L_{Z1} < L_{Z2}$, т. е. сначала Земля проходит точку Z_1 , затем Z_2 .

Для каждой из точек Z_1, Z_2 разности их долгот L_{Z1}, L_{Z2} с долготой L_0 одинаковы, т. к. точки стояния расположены симметрично относительно точки противостояния: $\Delta L_Z = L_0 - L_{Z1} = L_{Z2} - L_0$. Обозначим эту разность через $L_{Z\text{ст}}$, тогда $L_{Z1} = L_0 - L_{Z\text{ст}}$ и $L_{Z2} = L_0 + L_{Z\text{ст}}$.

Величина $L_{Z\text{ст}}$ — также угол между точками Z_0, Z_1 и Z_0, Z_2 ; угол $L_{Z\text{поп}}$ между обеими точками стояния Z_1, Z_2 одного попятного движения равен, очевидно, $2 L_{Z\text{ст}}$. Угол $L_{Z\text{ст}}$ соответствует углу $\varphi_{\text{ст}}$, и с учетом формулы (4) и 3-го закона Кеплера

$$L_{Z\text{ст}} = \frac{\tau}{|\tau-1|} \varphi_{\text{ст}} = \frac{\tau}{|\tau-1|} \arccos \frac{a^2 + \tau}{a(\tau+1)} = \frac{a\sqrt{a}}{|a\sqrt{a}-1|} \arccos \frac{\sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1}. \quad (43)$$

Таким образом, для полных гелиоцентрических долгот $L_{\text{ст}}^*$ всех точек стояния и противостояния (нижнего соединения) получаем:

$$L_{Z\text{ст}}^* = L_0 \pm L_{Z\text{ст}} + \frac{\tau}{\tau-1} 2\pi k = L_0 \pm L_{Z\text{ст}} + \frac{a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-1} 2\pi k, \quad \text{где } k \in \mathbb{Z} \quad (\text{в рад}), \quad (44)$$

$$L_{Z\text{ст}}^* = L_0 \pm L_{Z\text{ст}} + \frac{\tau}{\tau-1} \cdot 360^\circ k = L_0 \pm L_{Z\text{ст}} + \frac{a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-1} \cdot 360^\circ k \quad (\text{в град}). \quad (45)$$

При этом полные гелиоцентрические долготы $L_{\text{пр}}^*$ всех точек противостояния и нижнего соединения

$$L_{Z\text{пр}}^* = L_0 + \frac{\tau}{\tau-1} 2\pi k = L_0 + \frac{a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-1} 2\pi k = L_0 + \frac{\tau}{\tau-1} \cdot 360^\circ k = L_0 + \frac{a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-1} \cdot 360^\circ k; \quad (46)$$

полные долготы $L_{\text{соед}}^*$ точек соединения и верхнего соединения

$$\begin{aligned} L_{Z \text{ соедин}}^* &= L_0 + \pi + \frac{\tau}{\tau-1} 2\pi k = L_0 + \pi + \frac{a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-1} 2\pi k = \\ &= L_0 + 180^\circ + \frac{\tau}{\tau-1} \cdot 360^\circ k = L_0 + 180^\circ + \frac{a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-1} \cdot 360^\circ k. \end{aligned} \quad (47)$$

Это решение интересно тем, что для рассматриваемой модели оно определяет, при различных значениях k , все возможные точки стояния, противостояния (нижнего соединения) и соединения (верхнего соединения) в прошлом, и в будущем.

В частности, при $k = 0$ из уравнения (44) получаем для точек стояния: $L_{Z \text{ ст}}^* = L_0 \pm L_{Z \text{ ст}}$.

При $k = 1$ из (46) получаем выражение для угла $\Delta L_{Z \text{ пр}}$ между положениями Земли при двух соседних противостояниях, а также формулу (11) для времени между соседними противостояниями, т. е. для синодического периода T_S :

$$\Delta L_{Z \text{ пр}} = \frac{\tau}{|\tau-1|} 360^\circ; \quad T_S = \frac{\Delta L_{Z \text{ пр}}}{360^\circ} T_Z = \frac{T_p T_Z}{|T_p - T_Z|}. \quad (48)$$

6.6.2. Период и видимая дуга попятного движения

За время (период) $T_{\text{поп}}$ попятного движения Земля проходит по орбите дугу $L_{\text{поп}} = 2L_{Z \text{ ст}}$, соответственно $T_{\text{поп}} = \frac{L_{\text{поп}}}{2\pi} T_Z = \frac{L_{Z \text{ ст}}}{\pi} T_Z$, то есть

$$T_{\text{поп}} = \frac{T_Z}{\pi} \cdot \frac{\tau}{|\tau-1|} \arccos \frac{a^2 + \tau}{a(\tau+1)} = \frac{T_Z}{\pi} \cdot \frac{a\sqrt{a}}{|a\sqrt{a}-1|} \arccos \frac{\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}+1}. \quad (49)$$

Точки стояния определяют видимую дугу попятного движения с конечными точками P_1 и P_2 с геоцентрическими долготами L_{p1} и L_{p2} и гелиоцентрическими долготами λ_{p1} и λ_{p2} :

$$\lambda_{p1} = \lambda_{p0} - \lambda_{p \text{ ст}}; \quad \lambda_{p2} = \lambda_{p0} + \lambda_{p \text{ ст}},$$

где $\lambda_{p0} = L_0$ — долгота точки P_0 противостояния (нижнего соединения), $\lambda_{p \text{ ст}}$ — модуль разности гелиоцентрических долгот точки противостояния и двух смежных точек стояния: $\lambda_{p \text{ ст}} = |\lambda_{p0} - \lambda_{p1}| = |\lambda_{p0} - \lambda_{p2}|$.

В то время как при движении планет их полные геоцентрические долготы возрастают, вблизи точки противостояния гелиоцентрическая долгота убывает от λ_{p1} до λ_{p2} (что видно и по рис. 13) — это и есть попятное движение.

В частности, при $L_0 = 0$ отрицательной долготой $L_{Z1} = -L_{Z \text{ ст}}$ точки Z_1 соответствует положительная долгота $\lambda_{p1} = \lambda_{p \text{ ст}}$ точки P_1 , а положительной долготой $L_{Z2} = L_{Z \text{ ст}}$ точки Z_2 соответствует отрицательная долгота $\lambda_{p2} = -\lambda_{p \text{ ст}}$ точки P_2 .

Геоцентрический угол $\lambda_{p \text{ ст}}$ стояния по (14) составляет в рад

$$\lambda_{p \text{ ст}} = 2 \left| \arctg \frac{a \sin \frac{L_{\text{ст}}}{\tau} - \sin L_{\text{ст}}}{a \cos \frac{L_{\text{ст}}}{\tau} - \cos L_{\text{ст}}} \right| = 2 \left| \arctg \frac{a \sin \frac{L_{\text{ст}}}{a\sqrt{a}} - \sin L_{\text{ст}}}{a \cos \frac{L_{\text{ст}}}{a\sqrt{a}} - \cos L_{\text{ст}}} \right|. \quad (50)$$

Соответственно геоцентрический угол $\lambda_{\text{поп}}$ попятного движения, называемый дугой попятного движения, равен

$$\lambda_{\text{поп}} = 2\lambda_{p \text{ ст}}. \quad (51)$$

Два параметра попятного движения, $T_{\text{поп}}$ и $\lambda_{\text{поп}}$, обычно и указываются в справочниках и учебниках.

Ниже на рис. 15–16 представлены графики параметров движения внутренней (Венера) и внешней (Марс) планет. При этом точки противостояния и соединения — это нули функции $\sin \varphi^* = 0$, точки стояния — нули видимой геоцентрической долготы $\Delta\lambda_p$ и относительной видимой угловой скорости $\tilde{m}_p = m_p/n_Z$ планеты.

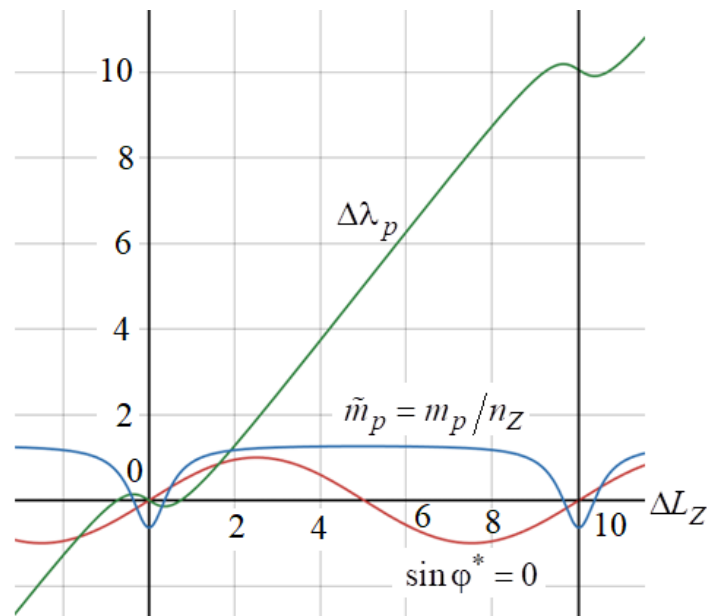


Рис. 15. Венера: графики функции $\sin \varphi^* = 0$, относительной видимой угловой скорости $\tilde{m}_p = m_p/n_Z$ и видимой долготы $\Delta\lambda_p$ в зависимости от углового перемещения ΔL_Z Земли от долготы L_0 противостояния

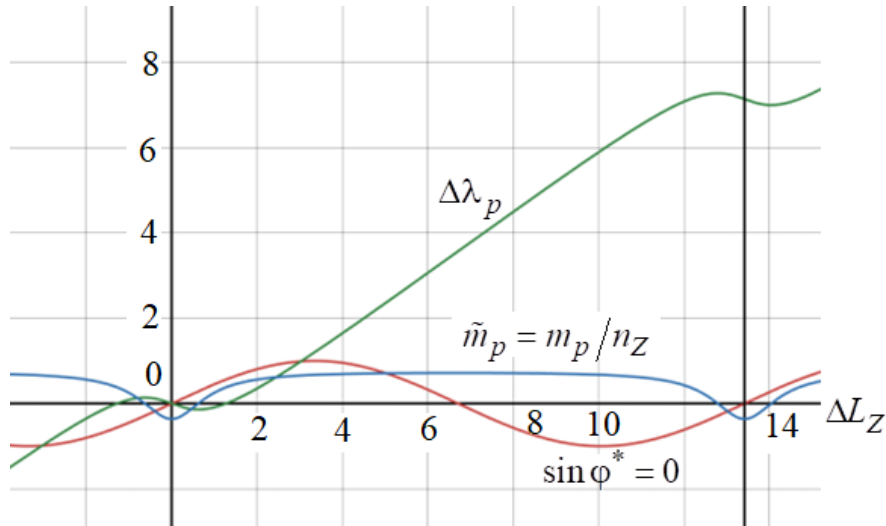


Рис. 16. Марс: графики функции $\sin \varphi^* = 0$, относительной видимой угловой скорости $\tilde{m}_p = m_p/n_Z$ и видимой долготы $\Delta\lambda_p$ в зависимости от углового перемещения ΔL_Z Земли от долготы L_0 противостояния

6.6.3. Ещё формулы для точек стояния

Другие формулы для точек стояния получаем по формулам геометрической связи гелиоцентрической и геоцентрической долгот планеты (24)–(28), подставив в них $\Delta L_Z = \Delta L_{Z\text{ст}}$ и $\varphi = \varphi_{\text{ст}}$. При этом для угла $\varphi_{\text{ст}}$ имеем в соответствии с (4) и (10):

$$\varphi_{\text{ст}} = \frac{|\tau-1|}{\tau} L_{\text{ст}}; \quad \cos \varphi_{\text{ст}} = \frac{a^2 + \tau}{a(\tau+1)}; \quad \sin \varphi_{\text{ст}} = \frac{\sqrt{(\tau^2 - a^2)(a^2 - 1)}}{a(\tau+1)},$$

или с учетом 3-го закона Кеплера:

$$\cos \varphi_{\text{ст}} = \frac{\sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1}; \quad \sin \varphi_{\text{ст}} = \frac{(\sqrt{a} - 1)\sqrt{a+1}}{a - \sqrt{a} + 1}.$$

В результате получаем для внешних планет из (24) и (26):

$$\lambda_{p\text{ст}} = \arctg \sqrt{\frac{\tau^2 - a^2}{a^2 - 1}} - \frac{\tau}{|\tau-1|} \arccos \frac{a^2 + \tau}{a(\tau+1)} = \arctg \frac{a}{\sqrt{a+1}} - \frac{a\sqrt{a}}{|a\sqrt{a}-1|} \arccos \frac{\sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1}, \quad (52)$$

для внутренних планет из (27)–(28):

$$\begin{aligned} \lambda_{p\text{ст}} &= \arctg \left(\frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{\tau^2 - a^2}{a^2 - 1}} \right) - \frac{1}{|\tau-1|} \arccos \frac{a^2 + \tau}{a(\tau+1)} = \\ &= \arctg \frac{1}{\sqrt{a(a+1)}} - \frac{1}{|a\sqrt{a}-1|} \arccos \frac{\sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1}. \end{aligned} \quad (53)$$

Модули поставлены в связи с тем, что по модели Птолемея получаем наоборот: для внешних планет — формулы (53), для внутренних — (52).

Итак, формулы (52)–(53), хотя и разные, но определяют одну и ту же величину. Это, естественно, получаем при расчетах; интересно и доказать это: если из первого уравнения (53) вычесть также первое уравнение (52), то получаем

$$\arccos \frac{a^2 + \tau}{a(\tau + 1)} = \arctg \sqrt{\frac{\tau^2 - a^2}{a^2 - 1}} - \arctg \left(\frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{\tau^2 - a^2}{a^2 - 1}} \right).$$

Далее, взяв тангенс от обеих частей этого уравнения, с учетом формул тангенса суммы и $\operatorname{tg}(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}/x$, приходим к одинаковым выражениям.

6.6.4. Другой метод определения параметров попятного движения

Получим формулы попятного движения, не прибегая к экстремальному методу, т. е. к дифференцированию.

При наблюдении с Земли движение планеты по небосводу определяется её скоростью, перпендикулярной направлению взгляда на неё с Земли (т. е. перпендикулярной радиус-вектору ZP). Поэтому планета кажется неподвижной, когда проекции скоростей планеты и Земли на нормаль к этому вектору равны (рис. 17):

$$v_Z \cos \alpha_1 = v_P \cos \alpha_2, \quad \text{т. е.} \quad n_Z R_Z \cos \alpha_1 = n_P R_P \cos \alpha_2.$$

Кроме того, из $\triangle SZP$ по теореме синусов имеем:

$$\frac{R_Z}{\sin \angle SPZ} = \frac{R_P}{\sin \angle SZP}.$$

При этом можно показать, что $\angle SPZ = \alpha_2$; $\angle SZP = 180^\circ - \alpha_1$;

$\varphi_{\text{ст}} = \alpha_1 - \alpha_2$, т. е. получаем систему

$$\begin{cases} \cos \alpha_1 = \frac{a}{\tau} \cos \alpha_2; \\ \sin \alpha_1 = a \sin \alpha_2. \end{cases}$$

Отсюда следует: $a^2 \sin^2 \alpha_2 + \frac{a^2}{\tau^2} \cos^2 \alpha_2 = 1$, и далее приходим к решению:

$$\sin \alpha_1 = \sqrt{\frac{\tau^2 - a^2}{\tau^2 - 1}}; \quad \sin \alpha_2 = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\tau^2 - a^2}{\tau^2 - 1}};$$

$$\cos \varphi_{\text{ст}} = \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 = \frac{a^2 + \tau}{a(\tau + 1)}.$$

Итак, для гелиоцентрического угла $\varphi_{\text{ст}}$ между Землей и планетой в момент стояния получили тот же результат (40), что и ранее, — и это естественно. Другие формулы попятного движения нам уже известны.

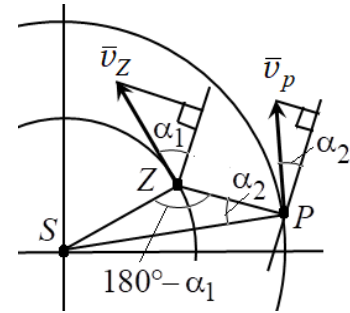


Рис. 17. К расчету попятного движения

6.7. Попятные движения по простейшей модели Птолемея

Очевидно, что в точке стояния скорость планеты сонаправлена её радиус-вектору $\overline{ZP}$ (т. е. лучу зрения; рис. 18) и разность проекций скоростей планеты на нормаль к $\overline{ZP}$ равна нулю: $v_D \cos \alpha_1 = v_3 \cos \alpha_2$, то есть $n_D R_D \cos \alpha_1 = n_3 R_3 \cos \alpha_2$.

Кроме того, из $\triangle ZPD$ по теореме синусов

$$\frac{R_D}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{R_3}{\sin \alpha}.$$

Можно показать, что $\alpha_1 = \alpha$; $\alpha_2 = \alpha + \beta$, т. е. имеем следующую систему с учетом того, что $a = R_D/R_3$, $\tau = n_D/n_3$:

$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = a \sin \alpha; \\ \cos(\alpha + \beta) = \frac{a}{\tau} \cos \alpha. \end{cases}$$

Отсюда $a^2 \sin^2 \alpha + \frac{a^2}{\tau^2} \cos^2 \alpha = 1$, т. е. решение системы

$$\cos \alpha = \frac{\tau}{a} \sqrt{\frac{a^2 - 1}{\tau^2 - 1}} = \sqrt{\frac{a(a+1)}{a^2 + a + 1}}; \quad \cos(\alpha + \beta) = \sqrt{\frac{a^2 - 1}{\tau^2 - 1}} = \sqrt{\frac{a+1}{a^2 + a + 1}}.$$

Соответственно

$$\beta = \arccos \sqrt{\frac{a+1}{a^2 + a + 1}} - \arccos \sqrt{\frac{a(a+1)}{a^2 + a + 1}} = \arccos \frac{\sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} \quad (54)$$

Как видим, что $\beta = \Delta L_3 - \Delta L_D$, т. е. β равен гелиоцентрическому углу ϕ между Землей и планетой: в точке стояния по (40) $\phi = \phi_{\text{ст}} = \arccos \frac{\sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1}$.

7. РАСЧЕТЫ

Сделаем теперь расчеты: значения a соответствуют приведенным в учебнике А.В. Засова и В.Г. Сурдина [4, с. 294], только для Плутона a — по справочнику П.Г. Куликовского [1, с. 264]); $T_Z = 365,26$ сут; представлены также синодические периоды, рассчитанные по (11); для сравнения указаны параметры попятного движения опять-таки по [1, с. 264].

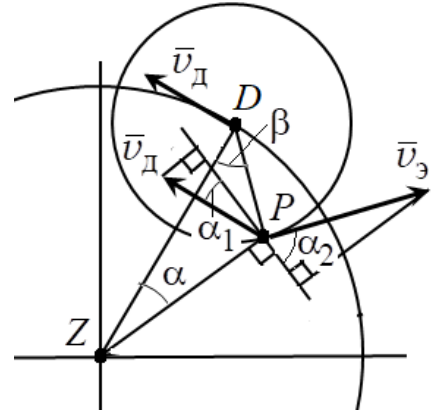


Рис. 18. К расчету попятного движения

Планета	a , а.е.	τ	T_S , сут	$T_{\text{поп}}$, сут	$\lambda_{\text{поп}}$, град	Данные [1, с. 264]	
						$T_{\text{поп}}$, сут	$\lambda_{\text{поп}}$, град
Меркурий	0,3871	0,2409	115,9	22,9	13,8	17	12
Венера	0,7233	0,6152	584,0	42,2	16,2	41	16
Марс	1,5236	1,8808	780,0	72,7	15,9	70	15
Юпитер	5,2044	11,868	398,9	120,6	9,9	119	10
Сатурн	9,5838	29,666	378,0	137,7	6,8	136	7
Уран	19,1872	84,048	369,7	151,8	4,0	150	4
Нептун	30,0209	164,49	367,5	158,5	2,8	158	3
Плутон	39,2311	245,73	366,8	161,7	2,2	163	2

Как видно, получаемые результаты несколько расходятся с данными справочника П.Г Куликовского (например, для Меркурия по $T_{\text{поп}}$ и $\lambda_{\text{поп}}$ на 35 % и 15 %).

8. КАК ПРЕДСТАВЛЕНЫ ФОРМУЛЫ ПОПЯТНОГО ДВИЖЕНИЯ В ШКОЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЕ

Рассмотренные выше формулы по попятному движению достаточно просты и, как показано в п. 6.5.4, могут быть выведены и без дифференцирования. Однако в русскоязычных учебниках они в большинстве своем отсутствуют.

С формулой (42) для $\varphi_{\text{ст}}$ (и в русскоязычных учебниках только с одной этой формулой) встречаемся в малоизвестном сборнике задач Московской астрономической олимпиады [10, задача 3.12]:

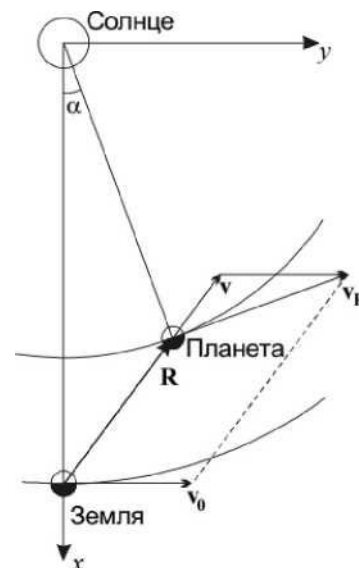
внутренняя планета имеет круговую орбиту с радиусом a а. е., лежащую в плоскости эклиптики. Определите разность гелиоцентрических долгот этой планеты и Земли, если известно, что планета находится в западной точке стояния. Орбиту Земли считать также круговой.

Чтобы подчеркнуть, что решения по попятному движению вполне соответствуют школьному уровню, приведем решение задачника полностью.

«Планета внутренняя (то есть $a < 1$), а стояние западное, — значит, эта планета недавно прошла точку нижнего соединения с Солнцем, видна по утрам и переходит от попятного движения к прямому (см. рисунок), при этом разница долгот планеты и Земли положительна.

В системе координат с центром в Солнце и осью x , направленной к Земле, орбитальная скорость планеты с учетом 3-го закона Кеплера $v_p = 1/\sqrt{a}$ (орбитальная скорость Земли v_0 принята равной единице). Обозначим искомую разность гелиоцентрических долгот планеты и Земли через φ , тогда проекции радиуса-вектора $\vec{R}_p$ и скорости планеты $\vec{v}_p$ на оси x и y

$$R_{px} = a \cos \varphi; \quad R_{py} = a \sin \varphi; \quad v_{px} = -\sin \varphi / \sqrt{a}; \quad v_{py} = \cos \varphi / \sqrt{a}.$$



Т. к. радиус-вектор Земли направлен вдоль оси x , ее скорость — вдоль оси y , а по модулю они равны 1, то компоненты вектора $\bar{R}$, направленного от Земли к планете, и скорости планеты $\bar{v}$ относительно Земли

$$R_x = a \cos \varphi - 1; \quad R_y = a \sin \varphi; \quad v_x = -\sin \varphi / \sqrt{a}; \quad v_y = \cos \varphi / \sqrt{a} - 1.$$

Когда планета не движется среди звезд на земном небе, векторы $\bar{R}$ и $\bar{v}$ сонаправлены, то есть $\frac{a \cos \varphi - 1}{-\frac{\sin \varphi}{\sqrt{a}}} = \frac{a \sin \varphi}{\frac{\cos \varphi}{\sqrt{a}} - 1}$. Перемножая диагональные члены этой пропорции и преобразовывая, получаем:

$$\varphi = \arccos \frac{a + \sqrt{a}}{a\sqrt{a} + 1}.$$

Этот угол составляет около 36° для Меркурия ($a = 0,387$) и 13° для Венеры ($a = 0,723$), если считать их орбиты и орбиту Земли круговыми».

Как видим, получена формула (42) для $\varphi_{\text{ст}}$, других формул попятного движения в этом решении нет.

9. СВОДКА УРАВНЕНИЙ ПОПЯТНОГО ДВИЖЕНИЯ

1. Полные гелиоцентрические долготы L_Z^* и L_p^* Земли и планеты:

$$L_Z^* = L_0 + \Delta L_Z; \quad L_p^* = L_0 + \Delta L_p = L_0 + \frac{\Delta L_Z}{\tau} .++$$

2. Полный гелиоцентрический угол φ^* между Землей и планетой в момент ΔL_Z :

$$\varphi^* = L_Z^* - L_p^* = \Delta L_Z - \frac{\Delta L_Z}{\tau} = \frac{\tau - 1}{\tau} \Delta L_Z.$$

3. Условие противостояния и всех соединений:

$$\sin \varphi^* = 0.$$

4. Видимая угловая скорость (геоцентрическая угловая скорость планеты):

$$\text{— в противостоянии (нижнем соединении):} \quad m_{p \min} = \frac{n_p R_p - n_Z R_Z}{R_p - R_Z} = -\frac{n_Z}{a + \sqrt{a}};$$

$$\text{— в соединении (верхнем соединении):} \quad m_{p \max} = \frac{n_p R_p + n_Z R_Z}{R_p + R_Z} = \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}(a + 1)} n_Z.$$

5. Гелиоцентрические углы между Землей и планетой в точках стояния:

$$\varphi_{\text{ст}}^* = \pm \varphi_{\text{ст}} + 360^\circ k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

6. Гелиоцентрический угол между Землей и планетой в момент стояния

$$\varphi_{\text{ст}} = \arccos \frac{a^2 + \tau}{a(\tau + 1)} = \arccos \frac{\sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1}.$$

7. Гелиоцентрический угол между точкой противостояния (нижнего соединения) и точкой стояния:

$$L_{\text{ст}} = \frac{\tau}{|\tau - 1|} \varphi_{\text{ст}} = \frac{a\sqrt{a}}{|a\sqrt{a} - 1|} \arccos \frac{\sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1}.$$

8. Гелиоцентрический угол между двумя точками стояния одного попятного движения (гелиоцентрический угол попятного движения):

$$L_{\text{поп}} = 2L_{\text{ст}} = \frac{2a\sqrt{a}}{|a\sqrt{a} - 1|} \arccos \frac{\sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1}.$$

9. Гелиоцентрические долготы всех точек стояния и противостояния (нижнего соединения):

$$L_{\text{ст}}^* = \pm L_{\text{ст}} + L_0 + 360^\circ \frac{a\sqrt{a}}{a\sqrt{a} - 1} k; \quad k \in Z.$$

10. Период попятного движения:

$$T_{\text{поп}} = \frac{L_{\text{поп}}}{2\pi} T_Z = \frac{L_{\text{ст}}}{\pi} T_Z = \frac{T_Z}{\pi} \cdot \frac{a\sqrt{a}}{|a\sqrt{a} - 1|} \arccos \frac{\sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1}$$

11. Дуга попятного движения (геоцентрический угол попятного движения):

$$\lambda_{\text{поп}} = 2\lambda_{p \text{ ст}} = \left| 2 \arctg \frac{a \sin \frac{L_{\text{ст}}}{\tau} - \sin L_{\text{ст}}}{a \cos \frac{L_{\text{ст}}}{\tau} - \cos L_{\text{ст}}} \right| = \left| 2 \arctg \frac{a \sin \frac{L_{\text{ст}}}{a\sqrt{a}} - \sin L_{\text{ст}}}{a \cos \frac{L_{\text{ст}}}{a\sqrt{a}} - \cos L_{\text{ст}}} \right|;$$

$$\lambda_{\text{поп}} = 2(\gamma - L_{\text{ст}}) = 2 \left(\arctg \frac{a}{\sqrt{a} + 1} - \frac{a\sqrt{a}}{|a\sqrt{a} - 1|} \arccos \frac{\sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} \right).$$

ВЫВОДЫ

1. Для простейших моделей планетных систем Коперника и Птолемея (гелиоцентрической и геоцентрической систем) получены формулы, определяющие важные параметры орбит и положений планет, в том числе формулы, описывающие основную особенность видимого движения планет — попятное движение.

2. Формулы определяют гелиоцентрические долготы точек противостояния, соединения и стояния, гелиоцентрический угол между точками стояния, длину дуги и период попятного движения в зависимости от радиуса орбиты планеты. Решения выполнены тремя разными методами — экстремальным и кинематическими по системам Коперника и Птолемея.

3. Показана математическая тождественность простейших моделей Коперника и Птолемея.

4. Показано, что вывод формул попятного движения и сами формулы соответствуют уровню школьной математики, то есть желательно присутствие этих формул в школьной учебной литературе.

5. Проанализированы решения для попятных движений, имеющиеся в известных задачниках и учебниках, описаны и исправлены ошибки в этих решениях.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Куликовский П. Г. Справочник любителя астрономии / Под ред. В. Г. Сурдина. Изд. 5-е, перераб. и полн. обновл. — М.: Эдиториал УРСС, 2002.

2. Воронцов-Вельяминов Б. А., Страут Е. К. Астрономия. 10–11 классы: базовый уровень: учебник. — 13-е изд., стер. — М.: Просвещение, 2025.

3. Левитан Е. П. Астрономия. 11 класс: базовый уровень: учебник — 4-е изд., стер. — М.: Просвещение, 2022.

4. Засов А. В., Сурдин В. Г. Астрономия: 10–11 классы. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019.

5. Климишин И. Л. Открытие Вселенной. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.

6. Воронцов-Вельяминов Б. А. Сборник задач и упражнений по астрономии: учеб. пособие для пед. высших учеб. заведений. — М.: Учпедгиз, 1939.

7. Воронцов-Вельяминов Б. А. Сборник задач и практических упражнений по астрономии: для astron. и физ. специальностей вузов. — 7-е изд., стер. — М.: Наука, 1977.

8. Клищенко А. П., Щупляк В. И. Астрономия: учеб. пособие. — Минск: Новое знание, 2004.

9. Щупляк В. И., Шундалов М. Б., Клищенко А. П., Малышиц В. В. Астрономия: учеб. пособие. — Минск: Вышэйшая школа, 2016. — 310 с.

10. Задачи Московской Астрономической олимпиады. 1997–2002. Под ред. О.С. Угольникова, В.В. Чичмаря. — М.: МИОО, 2002.

11. Фесенков В.Г. Общая астрономия. — М., Ленинград: Гостехиздат, 1946.

12. Полозова Н.Г., Румянцева Л.И. 350 лет наблюдениям прохождения Венеры по диску Солнца // Астрономический календарь на 1989 год. — М.: Наука, 1988. — Вып. 92.

Задачи

ПО ПОПЯТНОМУ ДВИЖЕНИЮ ПЛАНЕТ: РАБОТА НАД ОШИБКАМИ

Шульга Сергей Анатольевич,

к. т. н., преподаватель физики высшей квалификационной категории,
Ростовский колледж технологий машиностроения
(ГБПОУ РО «РКТМ»)

АННОТАЦИЯ

Теория попятного движения планет по простейшим моделям Коперника и Птолемея применена к решению конкретных задач астрономии.

Проанализированы решения задач по попятному движению, имеющиеся в известных задачниках и учебниках, описаны и исправлены ошибки в этих решениях.

ВВЕДЕНИЕ

Всевозможные петли и зигзаги траектории планет на небесной сфере при их попятном движении являются основной, характернейшей особенностью их видимого движения — потому во всех учебниках по общей астрономии обязательно присутствуют описания такого движения и графическое объяснение образования петель. Но при этом отсутствуют теоретический анализ и формулы, описывающие параметры попятного движения, хотя эти формулы безусловно важны, в первом приближении достаточно просты и вывод их не выходит за рамки школьной математики. Более того, в одном знаменитом задачнике по астрономии и трех университетских учебниках такие формулы приведены в очень неправильном виде (тут налицо то «присутствие, которое хуже отсутствия»).

Цель данной работы — на основе полученных формул попятного движения проанализировать решения задач по попятному движению, имеющиеся в известных задачниках и учебниках, описать и исправить ошибки в этих решениях.

1. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ МОДЕЛИ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Уникальной особенностью движения планет по небосводу является попятное движение с его петлями и зигзагами. При этом в рамках простейшей модели планетной системы Коперника положение точек и период стояния определяются довольно просто; эта именно простейшая модель (в том смысле, что далее следуют последующие её усложнения) — круговая плоская (эклиптическая) гелиоцентрическая (т. е. орбиты — круговые с центрами в Солнце, лежащие в плоскости эклиптики; движение планет — равномерное).

Положения планет далее, как и принято, определяем как гелиоцентрической долготой L , так и геоцентрической долготой λ . Углы L и λ в астрономии отсчитываются от точки весеннего равноденствия Υ (рис. 1; в круговой модели в силу симметрии окружностей эти углы можно отсчитывать и от любого направления). Движение планет — против часовой стрелки (как оно и есть, если на Солнечную систему смотреть со стороны Северного полюса мира).

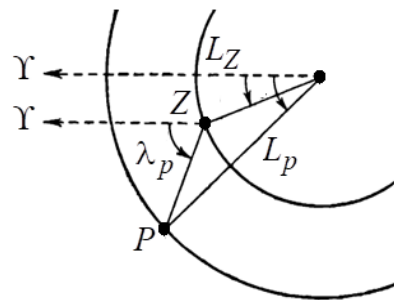


Рис. 1. Гелиоцентрические и геоцентрические долготы планеты и Земли [1, рис. 16]

Попытное движение тесно связано с двумя линейными конфигурациями планет, когда Земля, планета и Солнце расположены на одной прямой: при противостоянии внешняя планета находится за Землей, т. е. геоцентрические долготы λ планеты и Солнца отличаются на 180° ; при нижнем соединении внутренняя планета — между Солнцем и Землей (т. е. планета и Солнце имеют одинаковую долготу λ).

Попытное движение имеет место для внешних планет вблизи момента противостояния, для внутренних — вблизи нижнего соединения. При этом в круговой модели центр дуги попятного движения находится именно в точке противостояния или нижнего соединения.

Далее используем такие обозначения, соответствующие статье по попятному движению [3], на приведенные в которой результаты далее будем неоднократно ссылаться:

R_p, R_Z — радиусы орбит планеты и Земли;

$a = R_p/R_Z$ — относительный радиус орбиты планеты, численно равный радиусу R_p в а. е.;

T_p, T_Z — орбитальные периоды планеты и Земли;

$\tau = T_p/T_Z$ — относительный орбитальный период, численно равный орбитальному периоду T_p в земных годах;

n_p, n_Z — угловые гелиоцентрические скорости планеты и Земли (т. е. орбитальные угловые скорости).

В круговой модели величина n полагается постоянной:

$$n_p = \frac{360}{T_p}; \quad n_Z = \frac{360}{T_Z} \quad (\text{в град}); \quad n_p = \frac{2\pi}{T_p}; \quad n_Z = \frac{2\pi}{T_Z} \quad (\text{в рад})$$

(в формулах ниже углы — в рад, n — в рад/с, если это не оговорено особо), соответственно относительная угловая скорость планеты

$$\bar{n}_p = \frac{n_p}{n_Z} = \frac{1}{\tau}. \quad (1)$$

Рассмотрим теперь имеющиеся в учебной литературе решения по попятному движению планет. При этом используем результаты, приведенные в [3].

2. ЗАДАЧНИК ПО АСТРОНОМИИ Б.А. ВОРОНЦОВА-ВЕЛЬЯМИНОВА

Интересно описано попятное движение в вузовском задачнике по астрономии Б.А. Воронцова-Вельяминова [1–2]; к слову, единственный допущенный сейчас к использованию школьный учебник по астрономии (по соответствующему федеральному перечню учебников) — именно Б.А. Воронцова-Вельяминова.

Ниже мы опишем использование этого описания в трех изданиях университетского учебника по общей астрономии [5–7], последнее из которых — 2022 года. Так как 1-е издание задачника Б.А. Воронцова-Вельяминова — 1939 года, то получается, что почти 90 лет в отечественной учебной литературе предлагается к применению в расчетах на удивление неправильное описание важнейшей особенности видимого движения планет, а именно их попятного движения — об этих неправильностях ниже.

Задачник Б.А. Воронцова-Вельяминова — знаменитый: в предисловии к его 7-му изданию указано: «Предыдущие издания настоящего сборника задач и практических упражнений по общей астрономии были, в сущности, первыми учебными пособиями такого рода в мировой литературе. Через тридцать лет после выхода в свет сборник был издан в 1969 г. в Оксфорде в переводе на английский язык, и зарубежные его рецензенты отмечали, что по изданию учебников и пособий Советский Союз стоит впереди стран Запада».

По данным каталога Российской государственной библиотеки задачник выдержал 7 изданий (последнее — 1977-го года; надо полагать, к этому времени вузовские библиотеки уже были насыщены этими задачниками, и вплоть до появления электронных копий дальнейшие издания не потребовались). Кроме того, в каталоге есть сведения об изданиях задачника, в частности, на французском и испанском языках.

2.1. Текст задачника Б.А. Воронцова-Вельяминова

В задачнике и в 1-м издании [1, с. 57], и в 7-м [2, с. 79] (т. е. и во всех предыдущих) есть совершенно одинаковый следующий текст о попятном движении планет:

«Теория дает, что длина дуги попятного движения планеты (считая ее орбиту круговой)

$$\psi = (360^\circ - 2\theta_0) - 2n\tau, \quad (a)$$

где n — среднее суточное движение планеты, 2τ — продолжительность попятного движения в сутках и θ_0 — элонгация планеты в точке ее стояния, т. е. угол при Земле между направлениями к планете и к Солнцу. θ_0 дается формулой

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{a \sin \varphi_0}{a \cos \varphi_0 + 1}, \quad \theta_0 < 180^\circ, \quad (b)$$

где a — радиус орбиты в астрономических единицах. Угол φ_0 находится из формулы

$$\cos \varphi_0 = \frac{na^2 + n_1^2}{na + n_1a} = -\frac{na^2 + n_1^2}{(n + n_1)a}, \quad (c)$$

где n_1 — среднее суточное движение Земли».

2.2. Анализ решения Б.А. Воронцова-Вельяминова

Выводы формул (a)–(c) в задачнике не представлены. Но такое развернутое описание важных параметров попятного движения (длина его дуги, элонгация планеты в точке стояния) предполагает то, что по приведенным формулам может быть выполнен расчет. Соответственно в задачнике должны быть специальные задачи на эту тему — именно для использования приведенного выше полустраничного порядка расчета. Однако есть не несколько таких задач, а только одна — это задача № 458 в 1-м издании и она же с номером 440 в 7-м:

зная расстояния планет от Солнца, вычислить в градусах длину дуги попятного движения Юпитера.

Во всех изданиях рассматриваемого задачника к задачам приведены, как правило, краткие ответы и редко — с маленькими комментариями; в данном случае есть лишь краткий ответ, а именно: $\psi = 10,6^\circ$.

Начинаем считать по формулам (a)–(c), нужные численные данные берем из Википедии (статьи «Земля» и «Марс»):

1) средние суточные движения n_1 Земли и n Юпитера при их периодах обращения $T_Z = 365,256$ сут, $T_U = 4332,589$ сут:

$$n_1 = \frac{360}{T_Z} = 0,986 \frac{\text{град}}{\text{сут}}; \quad n = \frac{360}{T_U} = 0,083 \frac{\text{град}}{\text{сут}};$$

2) угол φ_0 по формуле (c); для радиуса орбиты Юпитера принимаем $a = 5,204$ а. е.; считаем по 1-й из формул (c), т. к. смысл перехода $\frac{na^2 + n_1^2}{na + n_1a} = -\frac{na^2 + n_1^2}{(n + n_1)a}$ совершенно не ясен:

$$\cos \varphi_0 = \frac{na^2 + n_1^2}{na + n_1a} = 0,579, \quad \text{т. е. } \varphi_0 = 54,600^\circ;$$

3) тангенс элонгации θ_0 планеты в точке ее стояния по формуле (b):

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{a \sin \varphi_0}{a \cos \varphi_0 + 1} = 1,057;$$

4) далее возникает вопрос об определении угла θ_0 по его тангенсу, т. к. в методике задачника об этом ничего не сказано; если принять автоматически, что $\theta_0 = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \theta_0)$, т. е. угол θ_0 — острый, то $\theta_0 = 46,577^\circ$;

5) в условии задачи не приведена фигурирующая в формуле (а) продолжительность попятного движения Юпитера; примем её по справочнику П. Г. Куликовского [4, с. 264]: $2\tau = 119$ сут; соответственно длина дуги попятного движения Юпитера по формуле (с)

$$\psi = (360^\circ - 2\theta_0) - 2n\tau = (360^\circ - 2 \cdot 46,577^\circ) - 0,083 \cdot 119 = 256,957^\circ.$$

Этот ответ явно не соотносится с приведенным в задачнике значением $\psi = 10,6^\circ$ и величиной этой дуги, указанной, например, в справочнике П. Г. Куликовского на указанной выше странице: 10° .

При вычерчивании схемы расположения планет в момент стояния Юпитера выясняется, что угол θ_0 тупой (рис. 2), тогда $\theta_0 = 180^\circ - \arctg(\tg\theta_0) = 133,423^\circ$; при этом получаем:

$$\psi = (360^\circ - 2\theta_0) - 2n\tau = (360^\circ - 2 \cdot 133,423^\circ) - 0,083 \cdot 119 = 83,267^\circ.$$

Ответ все равно неприемлемый.

2.3. Уточнение решения Б.А. Воронцова-Вельяминова

Перед уточнением решения сделаем два методологических замечания:

а) в формуле (а) присутствует продолжительность попятного движения $2\tau = T_{\text{поп}}$. Если $T_{\text{поп}}$ — величина эмпирическая, то определена она по положению планеты на небе, причем именно по дуге попятного движения $\lambda_{\text{поп}}$, — начало и конец этой дуги соответствуют моментам начала и конца попятного движения, никаких других «трубных гласов» к этим моментам небо не подает. То есть в литературе рядом с опытной величиной $T_{\text{поп}}$ стоит и значение $\lambda_{\text{поп}}$ (это «близнецы-братья»), и постановка учебной задачи вычисления $\lambda_{\text{поп}}$ по опытной величине $T_{\text{поп}}$ не вполне логична.

Если же $T_{\text{поп}}$ — величина теоретическая, то и дуга $\lambda_{\text{поп}}$ должна попутно определяться этой теорией и без привлечения $T_{\text{поп}}$ в качестве исходного опытного данного;

б) в круговой модели изменение гелиоцентрической долготы Земли ΔL_Z определяет по чисто геометрическим соображениям и продолжительность этого движения ΔT , и изменение геоцентрической долготы $\Delta \lambda_p$ планеты — это показано [3, п. 5].

Точке стояния планеты соответствует рис. 2; при таком расположении планет

$$\Delta \lambda_p = \Delta L_Z - \gamma, \text{ где } \gamma = \arctg \frac{a \sin \varphi}{a \cos \varphi - 1}; \quad \varphi = \frac{\tau - 1}{\tau} \Delta L_Z = \frac{a\sqrt{a} - 1}{a\sqrt{a}} \Delta L_Z. \quad (2)$$

Поскольку, очевидно, $\Delta L_Z = 2\pi \frac{\Delta T}{T_Z}$, то при известном значении ΔT

$$\Delta \lambda_p = 2\pi \frac{\Delta T}{T_Z} - \gamma. \quad (3)$$

При этом $\lambda_{\text{поп}} = 2|\Delta \lambda_p|$, и для значения ΔT , равного

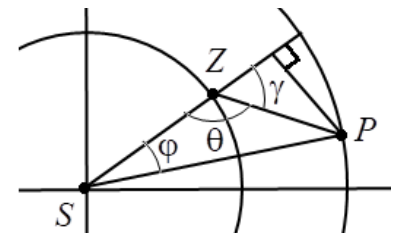


Рис. 2. Положение планет при стоянии

периоду $T_{\text{поп}}$ попятного движения Юпитера по справочнику П.Г. Куликовского $\Delta T = T_{\text{поп}} = 119$ сут, получаем по (2)–(3) при $T_Z = 365,256$ сут и $a = 5,204$ а. е.:

$$\lambda_{\text{поп}} = 2 \left| \Delta \lambda_p \right| = 2 \left| 2\pi \frac{\Delta T}{T_Z} - \gamma \right| = 9,945^\circ.$$

Итак, получили значение $\lambda_{\text{поп}}$ только из геометрических соображений; в решении не участвовали никакие результаты анализа попятного движения: в тексте задачника — это формула (с).

Теперь обратимся к решениям по попятному движению, приведенным в [3]: длина дуги попятного движения $\lambda_{\text{поп}}$ может быть найдена по любой из формул (50)–(51) и (52)–(53). Например, по (50)–(51) получаем при $a = 5,204$ а. е.:

$$\lambda_{\text{поп}} = 2(\gamma - L_{\text{ст}}) = 2 \left(\operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{a+1}} - \frac{a\sqrt{a}}{|a\sqrt{a}-1|} \arccos \frac{\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}+1} \right) = 9,947^\circ. \quad (4)$$

Одна эта формула заменяет весь текст по попятному движению из рассматриваемого задачника. Кроме того, по [3] период $T_{\text{поп}}$ составляет

$$T_{\text{поп}} = \frac{T_Z}{\pi} \cdot \frac{a\sqrt{a}}{|a\sqrt{a}-1|} \arccos \frac{\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}+1} = 120,634 \text{ сут}, \quad (5)$$

т. е. данные справочника П.Г. Куликовского ($T_{\text{поп}} = 119$ сут) не вполне соответствуют круговой модели.

Итак, расчет $\lambda_{\text{поп}}$ по формулам задачника выполнить невозможно, т. к. результаты расчета очевидно неприемлемы. По какой причине это так? — по причине неточности формул:

1) для формул (b)–(c) не указано, что же такое φ_0 , — а ведь это гелиоцентрический угол между Землей и планетой [3, формула (41)]: в точке стояния $\varphi_{\text{ст}} = \arccos \frac{n_p a^2 + n_Z}{(n_p + n_Z)a}$.

Это правильный вид формулы для φ_0 . Итак, в числителе формулы (с) задачника скорость n_1 должна быть в 1-й степени, а не в квадрате; кроме того, остается непонятным появление минуса в этой формуле во 2-м переходе;

3) опять-таки неправильна формула (b) для элонгации; правильно по [3] так:

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{a \sin \varphi_0}{a \cos \varphi_0 - 1}; \quad \theta_0 = 180^\circ - \operatorname{arctg} \frac{a \sin \varphi_0}{a \cos \varphi_0 - 1};$$

4) в формуле (a) должно стоять не n , а n_1 .

Как уже отмечено, с учетом всех этих исправлений весь процитированный текст задачника может быть заменен одной лишь формулой (4). Понятно, что если начинать с начала и приводить вывод этой формулы, то это будет занимать некоторое место, — но ведь и формулы в задачнике приведены без вывода.

При вычислении именно по задачику по исправленным формулам находим:

$$\cos \varphi_0 = \frac{na^2 + n_1}{na + n_1a} = 0,582, \text{ т. е. } \varphi_0 = 54,421^\circ;$$

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{a \sin \varphi_0}{a \cos \varphi_0 - 1} = 2,087; \quad \theta_0 = 180^\circ - \operatorname{arctg} \frac{a \sin \varphi_0}{a \cos \varphi_0 - 1} = 115,600^\circ;$$

$$\psi = (360^\circ - 2\theta_0) - 2n_1\tau = 11,513^\circ.$$

Вычисления чувствительны к принятому значению периода $T_{\text{поп}}$; если взять его величину 120,636 сут, вычисленную по точной для круговой модели формуле (5), то получаем $\psi = 9,900^\circ$. Разница со значением по точной формуле — вследствие использования угловых скоростей и округлений.

3. УНИВЕРСИТЕТСКИЕ УЧЕБНИКИ ПО ОБЩЕЙ АСТРОНОМИИ

Рассмотренный выше текст о попятных движениях перепечатан слово в слово в трех изданиях университетского учебника по общей астрономии [5, с. 45; 6, с. 64; 7, с. 65] — за тем лишь исключением, что формула (с) приведена в виде

$$\cos \varphi_0 = \frac{na^2 + n_1^2}{a(n + n_1)},$$

т. е. проигнорирован, как и должно быть, озадачивающий переход к знаку «—».

Итак, детально описанный порядок определения $\lambda_{\text{поп}}$, казалось бы, должен быть здесь применен к решению соответствующих задач. Однако в 1-м издании учебника [5] какие бы то ни было сопряженные задачи отсутствуют; во 2-м и 3-м изданиях [6–7] подходящая задача есть — это № 72:

сколько времени проходит от стояния Марса (когда прямое движение сменяется на попятное, в этот момент Марс практически не движется на фоне звезд) до его противостояния?

Вместе с тем решение в учебнике выполнено без обращения к приведенным в нем формулам для $\lambda_{\text{поп}}$. Прежде чем привести это решение, отметим, что искомое время — это половина периода попятного движения, т. е. по формуле () из [3] автоматически получаем:

$$T = \frac{T_{\text{поп}}}{2} = \frac{T_Z}{2\pi} \cdot \frac{a\sqrt{a}}{|a\sqrt{a}-1|} \arccos \frac{\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}+1} = 36^{\text{д}}, 37.$$

А вот длинное решение из учебников [5–7], как уже отмечено, совершенно не соответствующее приведенной в них же методикой расчета $\lambda_{\text{поп}}$:

момент стояния соответствует нулевой угловой скорости Марса в системе отсчета, связанной с Землей. Этот момент определяется равенством проекций орбитальных скоростей на картинную плоскость (рис. 3):

$$v_M \cos \beta = v_Z \sin(\gamma - 90^\circ) = -v_Z \cos \gamma.$$

Принимая величину большой полуоси орбиты Марса в 1,52 а. е., а также используя формулу для круговых скоростей $v_c = \sqrt{\frac{GM_S}{r}}$, где M_S — масса Солнца, запишем:

$$v_Z = \sqrt{1,52} v_M.$$

Из теоремы синусов для треугольника Солнце — Марс — Земля: $\frac{\sin \beta}{1} = \frac{\sin \gamma}{1,52}$.

Отсюда получим:

$$\begin{aligned} \cos \beta &= -\sqrt{1,52} \cos \gamma; \quad 1,52 \sin \beta = \sin \gamma; \\ \cos \beta &= \sqrt{3,83} \sin \beta; \quad \operatorname{tg} \beta = 0,511; \quad \beta = 27^\circ,07. \end{aligned}$$

Угол γ больше 90° (точка стояния находится между квадратурой и противостоянием), поэтому $\gamma = 90^\circ + \arcsin\left(\frac{\cos \beta}{\sqrt{1,52}}\right) = 136^\circ,24$. Разность гелиоцентрических долгот Земли и Марса $\Delta\lambda = 180^\circ - \beta - \gamma = 16^\circ,69$. В момент противостояния угол $\Delta\lambda = 0$. Определим, за какое время этот угол изменится на $16^\circ,69$, учитывая, что на 360° он изменяется за синодический период (для Марса синодический период $S = 779^{\text{д}},94 = 2,135$ года): $\frac{t}{S} = \frac{16^\circ,69}{360^\circ}$. Отсюда ис-
комое время $t = 36^{\text{д}}$.

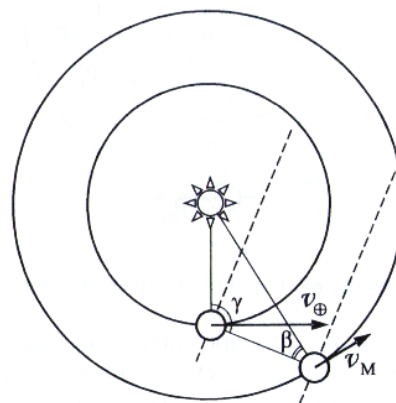


Рис. 3. Момент стояния Марса относительно Земли [6, рис. 9]

4. УЧЕБНИК АКАДЕМИКА В. Г. ФЕСЕНКОВА

О научных заслугах выдающегося астрофизика академика В. Г. Фесенкова — в соответствующей статье Википедии; нас интересует задача по попятному движению, присутствующая в его учебнике «Общая астрономия» 1946 года [8] (судя по данным Интернета, переизданий учебника не было).

4.1. Текст учебника В. Г. Фесенкова

Интересное нам решение — на стр. 71–72 учебника; поскольку обсуждение будет касаться всех деталей решения, приведем его текст целиком; при этом формулы для удобства пронумеруем (в оригинале отмечена номером только формула (a)) и обозначения для большей понятности пометим индексами (в оригинале обозначения для деферента — r , S , V , для эпицикла — R , T , v). Итак, далее — решение учебника.

Определение отношения радиуса эпицикла к радиусу деферента. Из наблюдений легко найти период сидерического и синодического обращения планеты. Кроме того, нетрудно определить промежуток времени между оппозицией и стоянием планеты.

Очевидно, точка стояния определится из того условия, что разность проекций скоростей планеты на плоскость, перпендикулярную лучу зрения, равняется нулю. Одна скорость

соответствует движению по эпициклу радиуса R_3 и с периодом T_3 . Назовем эту скорость через v_3 . Другая скорость v_d соответствует переносу всего эпицикла и находящейся на ней планеты по деференту.

Пусть радиус деферента R_d , период сидерического обращения T_d . Имеем:

$$v_d = 2\pi R_d / T_d; \quad v_3 = 2\pi R_3 / T_3.$$

Рассмотрим треугольник между положениями Земли Z , центром эпицикла O и точкой стояния K . Условие стояния планеты будет, согласно указанному:

$$v_d \cos \alpha = v_3 \cos(\alpha + \beta) \quad \text{или} \quad \frac{R_d}{T_d} \cos(\alpha + \beta) = \frac{R_3}{T_3} \cos \alpha; \quad \frac{R_3}{R_d} = \frac{T_3}{T_d} \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha}$$

(α, β — углы при точках Z и O).

С другой стороны, из того же треугольника имеем соотношение

$$R_d \sin \alpha = R_3 \sin(\alpha + \beta). \quad (a)$$

Сравнивая его с предыдущим условием, находим уравнение в тригонометрической форме

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{T_d}{T_3} = \frac{1}{K},$$

определяющее угол α , так как β известно, поскольку

$$\beta = \frac{t - t_0}{T_3} 360 = \frac{T_{\text{ст}}}{T_3} 360 \quad (b)$$

(t_0 — момент противостояния, t — момент стояния планеты).

Решая уравнения, находим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(1 - K) \operatorname{ctg} \beta}{2} - \sqrt{\frac{(1 - K)^2 \operatorname{ctg}^2 \beta}{4} - K}. \quad (c)$$

Зная, таким образом, углы α и β , определяем отношение R_3/R_d из уравнения (a).

Пример

Для Юпитера противостояние 1941 г. произошло 7,0 декабря, а остановка попятного движения 5,06 февраля 1942 г. Следовательно, $T_{\text{ст}} = t - t_0 = 60,06$ суток.

С другой стороны, $T_d = 11,862$ лет. Находим $K = 0,0843$, $\beta = 54,2^\circ$, $\alpha = 9,8^\circ$.

Поэтому отношение радиуса эпицикла к радиусу деферента составляет $1/5,27$. Как известно, это есть отношение радиуса земной орбиты к радиусу орбиты Юпитера.

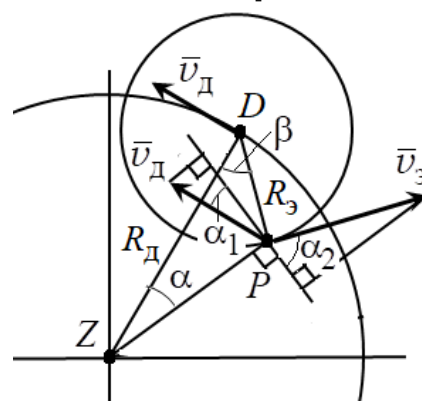


Рис. 4. К расчету попятного движения

4.2. Анализ решения В. Г. Фесенкова

Чтобы увидеть сразу, что с решением из учебника «что-то не то», пересчитаем сначала угол β по (b). В решении не указано принятое значение T_3 ; определим его при указанных величинах $K = 0,0843$ и $T_d = 11,862$ лет; соответственно $T_3 = KT_d = 1,000$ год, то есть $T_3 = T_Z = 365,2564$ сут. Соответственно при значении $t - t_0 = 60,06$ сут получаем по (b): $\beta = \frac{t - t_0}{T_3} 360 = 59,1957^\circ$. В решении же приведено значение $\beta = 54,2^\circ$; это принципиально меняет ситуацию — потому, что при $\beta = 59,1957^\circ$ и $K = 0,0843$ подкоренное выражение в (c) равно $-0,00978$ и дальнейшие вычисления невозможны.

С величиной же $\beta = 54,2^\circ$, происхождение которой объяснить также невозможно, вычисления можно продолжить: по (c) находим $\alpha = 9,8107^\circ$, и далее по (a) $R_d/R_3 = 5,2753$ — примерно как и указано в учебнике (5,27).

4.3. Исправление решения В. Г. Фесенкова

Начнем теперь исправлять решение. Итак, его идея — такая же, как и рассмотренное выше решение Б.А. Воронцова-Вельяминова: часть данных (в данном случае угол β) берется из наблюдений, остальное определяется аналитически.

Теперь — важный для данной задачи вопрос: какова же величина β ?

В учебнике $\beta = \frac{T_{ст}}{T_3} 360 = \frac{t - t_0}{T_3} 360$, где обозначено $T_{ст} = t - t_0$, причем t_0 — момент противостояния, t — момент стояния планеты; это означает, что β — угол между положениями Земли в эти моменты: $\beta = \Delta L_Z$.

Это неправильно — не учтено движение планеты по эллипсу: как видно из рис. 5, угол β — это гелиоцентрический угол ϕ между Землей и планетой; в точке стояния по формуле (4) статьи [3] с учетом того, что для внешней планеты $T_3 = T_Z$, $T_d = T_p$:

$$\beta = \phi_{ст} = \frac{\tau - 1}{\tau} \Delta L_Z = \frac{\tau - 1}{\tau} \cdot \frac{T_{ст}}{T_3} 360^\circ = 2\pi \frac{\tau - 1}{\tau} \cdot \frac{T_{ст}}{T_3}, \quad (6)$$

где обозначено $\tau = \frac{T_p}{T_Z}$; далее будем также использовать, как и в [3], обозначение $a = \frac{R_p}{R_Z}$.

Теперь вычисления дают для данных учебника: $\tau = \frac{1}{K} = 11,8624$; $T_{ст} = t - t_0 = 60,06$ сут; $T_Z = 365,2563$ сут и при этом $\beta = 54,2053^\circ$; $a = 5,2733$.

Получили для a значение, близкое к приведенному в учебнике ($a = 5,27$).

Современные данные по величине a для Юпитера: $a_U = 5,204267$ а. е. (статья в *WP* «Юпитер» со ссылкой на сайт *NASA*). Если взять величину $T_{ст} = 60,3180$ сут, вычисленную по точной для круговой модели формуле [3], то получаем значение 5,1970, отличающееся от a_U на 0,14 %.

Собственно, решение в учебнике В. Г. Фесенкова опирается на приведенный в п. 6.6.4 статьи [3] метод определения параметров попятного движения, где приведена формула для угла $\varphi_{\text{ст}}$ в момент стояния:

$$\cos \varphi_{\text{ст}} = \frac{a^2 + \tau}{a(\tau + 1)}.$$

Соответственно получаем для искомой величины a :

$$a = \frac{1}{2} \left[(\tau + 1) \cos \varphi_{\text{ст}} \pm \sqrt{(\tau + 1)^2 \cos^2 \varphi_{\text{ст}} - 4\tau} \right],$$

где $\varphi_{\text{ст}}$ — по (6).

По данным задачи из учебника получаем: $\tau = 11,8624$; $T_{\text{ст}} = t - t_0 = 60,06$ сут; $T_Z = 365,2563$ сут, т. е. $\varphi_{\text{ст}} = 0,9461$; $a = 5,2735$ и $a = 2,2494$.

Интересно то, что второе значение a также правдоподобно, т. е. есть две модели Птолемея с указанными данными для движения Юпитера. Однако 2-я модель с $a = 2,2494$ не может отвечать другим опытными данным — например, значению a , вычисленному по формуле

$$(34) \text{ статьи [3]: } a = \frac{m_{p\text{max}} - m_{p\text{min}}}{2n_p - m_{p\text{max}} - m_{p\text{min}}}, \text{ где все величины } n_p = n_Z / \tau, m_{p\text{max}}, m_{p\text{min}}$$

определяются экспериментально ($m_{p\text{max}}, m_{p\text{min}}$ — максимальная и минимальная видимые угловые скорости планеты) и с учетом того, что для внешней планеты $n_3 = n_Z$, $n_d = n_p$.

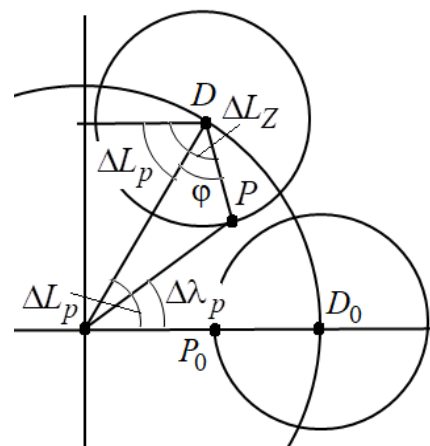


Рис. 5. К расчету движения по модели Птолемея

5. ЕЩЁ НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ ПО ПОПЯТНОМУ ДВИЖЕНИЮ

В задачнике [1–2] и учебниках [5–7] есть ещё 6 задач, связанных с попятным движением, противостоянием и нижним соединением; рассмотрим их.

Задача 1 [**1**, № 456; **2**, № 438; **5**, № 11 с. 54; **6**, № 11 с. 76; **7**, № 11 с. 77]:

принимая, что орбиты планет — круги, лежащие в одной плоскости, и что радиус орбиты предполагаемой планеты равен 40 а. е., определить ее суточное смещение на небесной сфере в противостоянии.

В задачнике [1–2] дан только краткий ответ и почему-то очень приближенный, что совсем нехарактерно для астрономии: около 1,5 мин в сутки.

Решение в учебниках [5–7] (с обозначениями, использовавшимися выше): «Определим среднее суточное движение планеты: $n_p = \frac{360^\circ}{T_Z R_p \sqrt{R_p}} = 14'',026 \text{ сут}^{-1} = 6,8 \cdot 10^{-5} \text{ рад/сут}$

(для Земли $R_Z = 1$ а. е., $n_Z = 59',1 \text{ сут}^{-1} = 1,72 \cdot 10^{-2} \text{ рад/сут}$). Тогда угол φ суточного смещения на небесной сфере в противостоянии можно рассчитать по формуле

$$\text{tg} \varphi \approx \frac{n_Z R_Z - n_p R_p}{R_p - R_Z}, \text{ откуда } \varphi = 1' 16'',54 \text{.}.$$

Отметим сначала, что суточное угловое перемещение $\Delta\lambda_p$ сут планеты на небесной сфере обычно связывают с её видимой угловой скоростью m_p : $\Delta\lambda_p \text{ сут} = m_p t$, где $t = 1$ сут.

Величина m_p — важная, и в учебниках желательно было бы присутствие соответствующей общей формулы [3, п. 2.3]: $m_p = \frac{d\lambda_p}{dt} = \frac{n_p R_p^2 + n_Z R_Z^2 - (n_p + n_Z) R_p R_Z \cos \varphi^*}{R_{Zp}}$.

Из этой формулы и следуют выражения для максимальной $m_{p\max}$ (в соединении) и минимальной $m_{p\min}$ (в противостоянии) видимых угловых скоростей планеты.

Далее: в условии задачи сказано, что орбиты планет — круги, лежащие в одной плоскости, т. е. используемая модель — круговая плоская. При этом суточные перемещения планет постоянны: $\Delta L_p = n_p t$ и $\Delta L_Z = n_Z t$, где $t = 1$ сут. В рассматриваемых же учебниках вычисляются орбитальные угловые скорости планеты n_p и Земли n_Z , а названы они средними суточными движениями.

Кроме того, по формуле (29) [3] угол φ суточного перемещения планеты на небесной сфере в противостоянии $\varphi \approx m_{p\min} t = \frac{n_p R_p - n_Z R_Z}{R_p - R_Z} t = -1' 16'', 54$, причем знак « $\approx$ » говорит о

попятном движении планеты, а знак « $\approx$ » указывает на то, что величина m принята постоянной (в течение суток она меняется незначительно, в особенности же вблизи противостояния, где m экстремальна). Таким образом, помимо прочего присутствующий в решении из учебников знак тангенса совершенно излишен.

Задача 2 [5, № 16 с. 54; 6, № 11 с. 77; 7, № 16 с. 78]:

определите время минимального смещения небесного тела на небесной сфере, движущегося по круговой орбите с $r = 4$ а. е., которое можно обнаружить с поверхности Земли с помощью зрительной трубы (диаметр ее объектива $\theta = 60$ мм, разрешающая способность человеческого глаза $d\theta \sim 1'$, диаметр зрачка $d \approx 6$ мм): в противостоянии; в соединении.

Здесь в приведенном решении обращает на себя внимание ошибочное название, как и в задаче № 11, угловой скорости средним суточным движением небесного тела. Далее пишется: «Чтобы получить угловое смещение тела на небесной сфере в противостоянии за сут-

ки, используем формулу $\operatorname{tg} \varphi_1 \approx \frac{n_Z R_Z - n_p R_p}{R_p - R_Z}$, полученную в задаче 11».

Однако мы видели, что в задаче 11 вывод этой формулы отсутствует. Далее: «Для соединения формула будет несколько иной: $\operatorname{tg} \varphi_2 \approx \frac{n_Z R_Z + n_p R_p}{R_p + R_Z}$ ».

Опять-таки, вывод формулы не приведен, тангенс излишен, не указано, почему использован знак приближения.

Задача 3 [**1**, № 433; **2**, № 415]:

с какой видимой угловой скоростью Марс движется прямым движением в соединении и обратным движением в противостоянии?

Ответ в [1–2]: в противостоянии $-21',52$ в сутки; в соединении $48',16$ в сутки.

Ответы по (30) и (32) статьи [3] при $a = 1,524$; $n_Z = 59',14 \text{ сут}^{-1}$: $m_{p\min} = -21',44$; $m_{p\max} = 42',41 \text{ сут}^{-1}$; для $m_{p\max}$ разница существенная.

Задача 4 [**1**, № 434; **2**, № 416]:

с какой видимой угловой скоростью изменяется угловое удаление Венеры от Солнца вблизи времени верхнего соединения? Синодический период обращения Венеры 584 дня и ее расстояние от Солнца 0,72 а. е.

Ответ в [1–2]: $21'28''$ в сутки; развернутого решения в задачниках нет.

Приведем решение из [3, п. 6.3]:

вблизи верхнего соединения внутренние планеты движутся в ту же сторону (с запада на восток), что и Солнце. Таким образом, видимая угловая скорость углового удаления внутренней планеты от Солнца вблизи момента верхнего соединения составляет

$$m_{\text{уд}} = m_{p\max} - n_Z = \frac{a+\tau}{a+1} \cdot \frac{n_Z}{\tau} - n_Z = \frac{1-\tau}{a+1} \cdot \frac{a}{\tau} n_Z = \frac{1-a\sqrt{a}}{\sqrt{a}(a+1)} n_Z.$$

Считаем для Венеры: $m_{\text{уд}} = 15'33,0'' \text{ сут}^{-1}$.

Синодический период обращения Венеры в этом решении не участвует.

Задача 5 [**1**, № 435; **2**, № 417]:

с какой видимой угловой скоростью Венера пересекает диск Солнца при ее прохождении? Сколько времени длится ее прохождение по диску Солнца, если оно центральное? Расстояние Венеры от Солнца 0,723 астр. единицы, синодический период обращения Венеры 584 дня; диаметр Солнца $32'$ ($1/675$ окружности).

Ответ из задачников:

продолжительность прохождения равна $\frac{277}{723} \cdot \frac{1}{675} \cdot 584 = 0,332 \text{ сут} = 7^{\text{ч}} 58^{\text{м}}$. Угловая

видимая скорость равна $241''$ в час.

Развернутого решения в задачниках нет и не пояснено, что такое 277; поэтому приведем решение из [3, п. 6.3]:

вблизи Солнца и нижнего соединения внутренние планеты движутся попятно и навстречу видимому годовичному движению Солнца, т. е. видимая угловая скорость планеты при ее прохождении по диску Солнца

$$m_{\text{прох}} = |m_{p\min}| + n_Z = -\frac{a-\tau}{a-1} n_p + n_Z = \frac{1-\tau}{1-a} \cdot \frac{a}{\tau} n_Z = \frac{a+\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} n_Z. \quad (7)$$

Продолжительность центрального прохождения (т. е. по диаметру диска) при угловом диаметре Солнца D

$$t_{\text{прох}} = \frac{D}{m_{\text{прох}}} = \frac{a + \sqrt{a}}{a + \sqrt{a} + 1} \cdot \frac{D}{n_Z}. \quad (8)$$

Сделаем расчет для Венеры, принимая, что радиус её орбиты $a_V = 0,723$ а. е., диаметр Солнца $32'$, орбитальная скорость Земли $n_Z = 0,986^\circ \text{ сут}^{-1}$: по (7)–(8) получаем

$$m_{\text{прох}} = 1^\circ,612 \text{ сут}^{-1} = 4',030 \text{ час}^{-1} = 241'',811 \text{ час}^{-1};$$

$$t_{\text{прох}} = \frac{32'}{4,030'} \text{ час} = 7^{\text{ч}}56,41^{\text{м}}.$$

Синодический период обращения Венеры в этом решении, как и в предыдущей задаче, не участвует.

Задача 6 [5, № 43 с. 56; 6, № 42 с. 79; 7, № 42 с. 80]:

определите характерное время прохождения Венеры по диску Солнца. Как она перемещается по диску, если ее наблюдать из средних широт северного полушария: справа налево или слева направо?

Решение из учебников: «Угловой диаметр диска Солнца равен примерно $0,5^\circ$. Расстояние от Солнца до Венеры $0,72$ а.е., расстояние от Земли до Венеры в нижнем соединении $0,28$ а. е. Пересекая по диаметру диск Солнца, Венера проходит и своем синодическом движении дугу относительно Солнца $(0,5^\circ \cdot 0,28)/0,72 \approx 0,194^\circ$. Поскольку синодический период Венеры равен $583,92$ сут, то она проходит по диску Солнца за $(0,194^\circ \cdot 583,92)/360^\circ \approx 0,315 \text{ сут} \approx 7^{\text{ч}}34^{\text{м}}9,6^{\text{с}}$. Если смотреть на Солнечную систему со стороны северного полюса эклиптики, то Венера и Земля движутся вокруг Солнца против часовой стрелки, с запада на восток, причем Венера быстрее, чем Земля. Поэтому вблизи нижнего соединения Венера перемещается по небу слева направо (попятное движение — с востока на запад). Таким же будет и ее движение по диску Солнца».

Решение из статьи [3, п. 6.3] приведено выше.

ВЫВОДЫ

1. Теория попятного движения планет по простейшим моделям Коперника и Птолемея применена к решению конкретных задач астрономии.
2. Проанализированы решения для попятных движений, имеющиеся в известных задачах и учебниках, описаны и исправлены ошибки в этих решениях.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Воронцов-Вельяминов Б. А. Сборник задач и упражнений по астрономии: учеб. пособие для пед. высших учеб. заведений. — М.: Учпедгиз, 1939.
2. Воронцов-Вельяминов Б. А. Сборник задач и практических упражнений по астрономии: для астрон. и физ. специальностей вузов. — 7-е изд., стер. — М.: Наука, 1977.
3. Шульга С. А. Простейшие модели планетных систем Коперника и Птолемея: теория, формулы, расчеты. / Работа областного дистанционного конкурса творческих работ «Педагоги — науке». — Ростов н/Д, 2026.
4. Куликовский П. Г. Справочник любителя астрономии / Под ред. В. Г. Сурдина. Изд. 5-е, перераб. и полн. обновл. — М.: Эдиториал УРСС, 2002.
5. Клищенко А. П., Щупляк В. И. Астрономия: учеб. пособие. — Минск: Новое знание, 2004.
6. Щупляк В. И., Шундалов М. Б., Клищенко А. П., Малыщиц В. В. Астрономия: учеб. пособие. — Минск: Вышэйшая школа, 2016.
7. Щупляк В. И., Шундалов М. Б., Клищенко А. П., Малыщиц В. В. Астрономия: учеб. пособие. — Минск: Вышэйшая школа, 2022.
8. Фесенков В.Г. Общая астрономия. — М., Ленинград: Гостехиздат, 1946.

Эволюция галактик и звёзд

Котова Людмила Петровна,

преподаватель физики и астрономии высшей квалификационной категории,

Волгодонский техникум общественного питания и торговли
(ГБПОУ РО «ВТОПиТ»)

ВВЕДЕНИЕ

Огромный сдвиг в знаниях произошел с обнаружением относительности и скорости света. Ведь это позволило понять, что мы видим не просто космическую даль, а как бы оглядываемся в прошлое. Когда перед вами возникает объект в миллиарде световых лет, вы видите его таким, каким он был миллиард лет назад. Эта «машина времени» помогла познакомиться с галактической эволюцией. Все объекты берут свое начало от Большого Взрыва, разрастаясь и меняясь со временем. Этот процесс все еще окутан легкой дымкой таинственности, поэтому манит ученых.

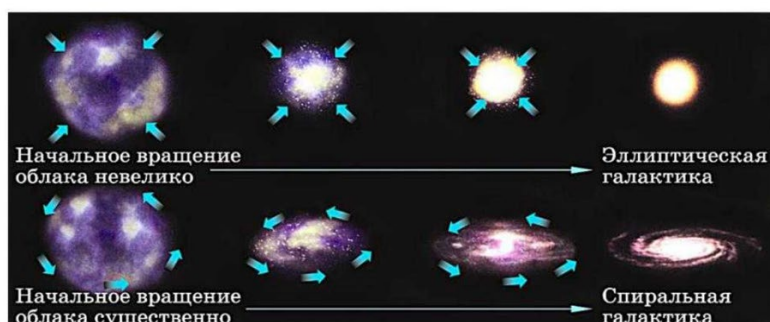
Цель данной работы: показать эволюцию развития звезд и галактик, зарождение нашей галактики, в которой мы живем.

Актуальность: вопрос развития и происхождения галактик актуален, т. к. людям интересно знать, как образовалась наша планета Земля, галактика, в которой мы находимся и благодаря которой мы живём, радуемся и развиваемся.

1. ПРОИСХОЖДЕНИЕ И ЭВОЛЮЦИЯ ГАЛАКТИК

Чем больше Вселенная расширялась, тем сильнее остывала. Поэтому у материи появилась возможность распределиться практически равномерно. Далее гравитация стала притягивать плотные области, накапливая газовые облака и большие скопления, которые и стали древними галактиками (родились первые звезды). Некоторые из них были маленькими и трансформировались в карликовые галактики, другие (покрупнее) — спиральные.

Полноценные галактики объединялись в группы, скопления и сверхскопления. В масштабах своей группы они могли подойти на достаточно близкое расстояние, чтобы запустить процесс слияния. Результат всегда зависит от массы.



Галактика образуется из огромного газового облака, размеры которого лишь незначительно превышают размер будущей галактики. При сжатии облака образуются первые звезды. Эволюция галактики зависит от начальных условий образования: начальной скорости вращения газового облака и его массы

Рис. 1. Образование галактик

2. ГАЛАКТИКИ

В момент столкновения их спиральная структура рушится, поэтому позволяет перейти на новый уровень. Эллиптические считаются крупнейшими в своем виде. Кроме того, при слиянии увеличиваются и центральные сверхмассивные черные дыры.

У всего есть начало и конец. Приходит время, когда в галактике заканчивается пыль и газ. А ведь это главный материал для появления новых звезд. Миллиарды лет активность замедляется, пока все не остановится полностью. Но это еще не смерть, так как галактика может найти соседа и слиться с ним, чтобы запустить новый процесс (приложение 1).

3. ЭВОЛЮЦИЯ ЗВЁЗД

Скорость развития звезды зависит от процессов превращения водорода в гелий при термоядерных реакциях в центральных областях звезды. После выгорания водорода в центральной зоне у звезды образуется *гелиевое ядро*. Водородные термоядерные реакции продолжают протекать, но только в тонком слое вблизи поверхности этого ядра. Выгоревшее ядро начинает сжиматься, а внешняя оболочка — расширяться. Звезда принимает гетерогенную структуру. Оболочка разбухает до колоссальных размеров, внешняя температура становится низкой, и звезда переходит в стадию *красного гиганта*.

Для красного гиганта характерна низкая внешняя температура, но очень высокая внутренняя. С ее повышением в термоядерные реакции включаются все более тяжелые ядра. На этом этапе (при температуре свыше 150 млн. К) в ходе ядерных реакций осуществляется синтез химических элементов. В результате роста давления, пульсаций и других процессов красный гигант непрерывно теряет вещество, которое выбрасывается в межзвездное пространство.

4. МЕЖЗВЁЗДНОЕ ПРОСТРАНСТВО



Дальнее космическое пространство нельзя считать вакуумом, в котором ничего нет. Хотя именно так нам его показывают многие фильмы и картины. Его наполнением является **межзвездная среда**, она состоит из: рассредоточенных газов и пыли. Также в ней присутствуют магнитные поля, некоторые излучения, пылинки и ионы, отдельные молекулы. Плотность данной материи может меняться в зависимости от зоны. Ближе к центру планетной системы плотность повышается, в среднем она составляет миллион частиц на метр кубический. Газовая составляющая состоит примерно из 89% водорода, 9% гелия и 2% смеси тяжелых соединений, в том числе и металлов.

5. СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ ЗВЁЗД

При массе менее **1,4 массы Солнца** звезда переходит в стационарное состояние с очень большой плотностью (сотни тонн на 1 см³). Такие звезды называются **белыми карликами**. Тепловые запасы звезды постепенно истощаются и звезда медленно охлаждается, что сопровождается выбросами оболочки звезды. Молодые белые карлики, окруженные остатками оболочки, наблюдаются как планетарные туманности. Белый карлик как бы вызревает внутри красного гиганта и появляется на свет, когда красный гигант сбрасывает свои поверхностные слои, образуя планетарную туманность.

При массе **более 1,4 массы Солнца** стационарное состояние звезды без внутренних источников энергии становится невозможным, происходит мощный взрыв - вспышка **сверхновой звезды** с выбросом значительной части вещества звезды в окружающее пространство с образованием газовых туманностей.

Часть массы взорвавшейся сверхновой звезды может остаться в виде сверхплотного тела — **нейтронной звезды** или **черной дыры**.

6. ЗВЁЗДНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ



7. ЧЁРНЫЕ ДЫРЫ

Что такое чёрная дыра?

Это может показаться странным, но чёрные дыры являются самыми простыми объектами во Вселенной в плане характеристик. У них есть лишь два параметра: скорость вращения и масса. В астрофизике считается, что они являются финальным этапом эволюции звёзд. Когда жизненный цикл светила подходит к концу, оно взрывается, а его центр превращается в чёрную дыру.

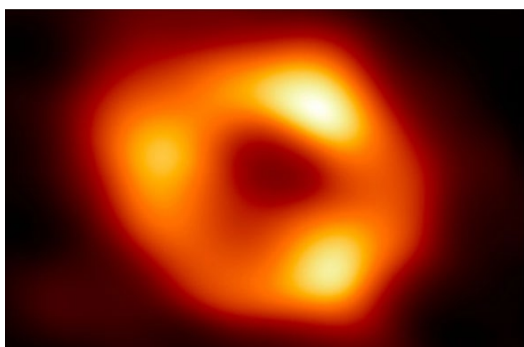
Поверхность новообразованного небесного тела называется горизонтом событий. Но нужно понимать, что у чёрной дыры отсутствует физическая оболочка. Под данным термином подразумевается лишь пространство на определённом расстоянии от центра, где заканчивается действие силы притяжения. Когда объект или свет пересекает горизонт событий, он уже не может выбраться из чёрной дыры, поскольку оказывается в сильном гравитационном поле.



Чёрная дыра



Самая старая чёрная дыра



Сверхмассивная чёрная дыра



Чёрная дыра с чётко выраженным горизонтом событий



Тень чёрной дыры



Солнечная Система в галактике
Млечный путь

Чёрные дыры — самые завораживающие и страшные объекты во Вселенной. Астрофизики всё ещё пытаются понять эти загадочные массивные объекты.

Тень чёрной дыры: в 2023_году группа исследователей с помощью нескольких крупных обсерваторий получила новое изображение чёрной дыры в центре галактики М87. Этот монстр, в 6,5 миллиарда раз массивнее Солнца, находится на расстоянии 55 миллионов световых лет от нас. Новое составное изображение раскрывает несколько аспектов объекта, включая структуру перегретого материала, который его окружает, и высокоскоростную релятивистскую струю, которая исходит из него.

Считается, что это явление возникает, когда газообразный материал из центра галактики скапливается вблизи чёрной дыры. Выделяющаяся при этом энергия, порождает струи частиц, ускоряющихся до скоростей, близких к скорости света.

8. НАША ГАЛАКТИКА

Млечный Путь (также называется Галактика) — спиральная галактика, в которой находится **Земля** и вся **Солнечная система**. Относится к типу спиральных галактик с перемычкой.

Радиус Млечного Пути составляет 16 килопарсек. В Галактике находится от 100 до 400 миллиардов звёзд, а её светимость составляет $2 \cdot 10^{10} L_0$.

Название "Млечный Путь" происходит от светлой туманной полосы в ночном небе, свет которой создаётся многочисленными тусклыми звёздами в диске Галактики.

Учёные не могут назвать точный возраст Млечного Пути, но галактика считается довольно древней. Доказательством тому является звезда HD 140283. Она находится в её области и лишь на 100 млн лет младше, чем Вселенная.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Согласно теории Большого взрыва вначале наша Вселенная имела однородную структуру. Незначительные колебания плотности подтолкнули некоторые частицы перемещаться под действием силы тяжести, в результате притяжения они объединились в более крупные структуры.

Звёзды образуются в результате гравитационного сжатия вещества из газопылевых облаков. В зависимости от массы звезды в процессе эволюции проходят стадии от протозвёзд до белых карликов, нейтронных звёзд или чёрных дыр. В ходе эволюции звёзд в результате термоядерных реакций и взрывов происходит образование химических элементов тяжелее водорода.

Млечный путь уже проглотил несколько карликовых галактик и преобразовал их в шлейф звёзд, вращающихся вокруг ядра галактики. В настоящее время внутрь затягивается карликовая галактика в Стрельце. Похожая участь ждёт карликовые галактики Большое и Малое Магеллановы облака.

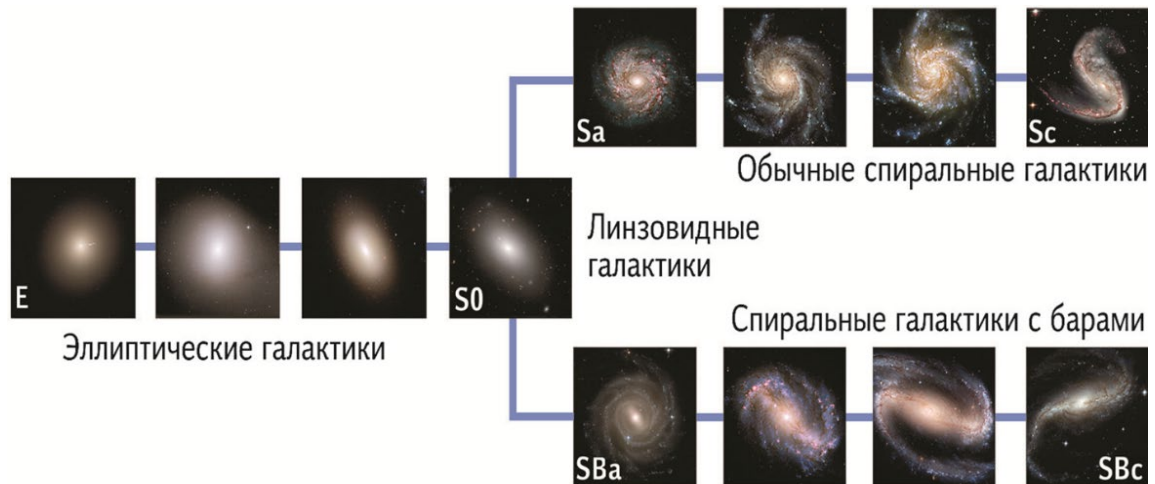
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронцов-Вельяминов Б. А. Астрономия. Базовый уровень. 11 класс: учебник/ Б. А. Воронцов-Вельяминов, Е. К. Страут. — М.: Дрофа, 2017.
2. Горелик Г. Е. Новые слова науки — от маятника Галилея до квантовой гравитации / Г. Е. Горелик // Приложение к журналу “Квант”, 2013, №3.
3. Казютинский В. В. Астрономия и современная картина мира / В. В. Казютинский. — М.: Книга по требованию, 2013.
4. Куликовский П. Г. Справочник любителя астрономии. — М.: Либроком, 2013.
5. Левитан Е. П. Астрономия. Базовый уровень. 11 класс: учебник. — М.: Просвещение, 2018.
6. Решетников В. П. Почему небо темное. Как устроена Вселенная. — М.: Век-2, 2012.
7. Сурдин В. Г. Галактики. — М.: Физматлит, 2013.

ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ

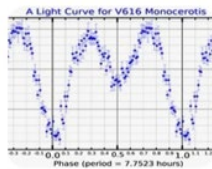
1. <http://www.astronews.ru/>
2. <http://www.cosmoworld.ru>
3. <http://menobr.ru>
4. <http://www.planetarium-moscow.ru/>

Приложение 1. Виды галактик

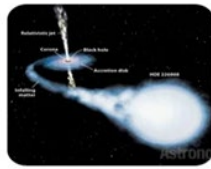


Приложение 2. Виды чёрных дыр

Список ближайших чёрных дыр



A0620-00



Лебедь X-1



V404 Лебедя

Смотрите также



Белая дыра



TON 618



Сверхмасси...
чёрная дыра